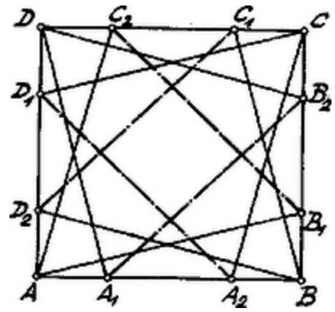
I. Megoldás. Induljunk ki az $ABCD$ négyzet valamely csúcsából, pl. az A-ból. Ha A a négyzetbe írt egyenlőoldalú háromszög csúcsa, a másik két csúcs az AC átlóra nézve szimmetrikus helyzetű úgy, hogy az egyik csúcs B_1 a BC, a másik C_2 a CD oldalon fekszik és

$$B_1AB\sphericalangle = C_2AD\sphericalangle = 15^\circ.$$

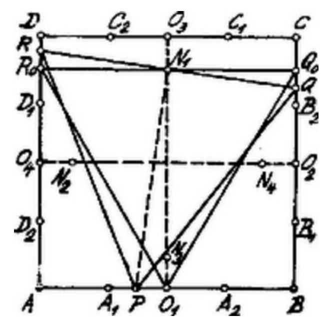
Ezért $AB_1 = AC_2$ és $B_1AC_2\sphericalangle = 60^\circ$: az $AB_1C_2\,\Delta$ egyenlőoldalú.



Ha már most minden csúcsból oly egyeneseket húzunk, amelyek a csúcsban találkozó oldalakkal 15°-ú szögeket zárnak be, az AB oldalon az A_1, A_2, a BC oldalon a B_1, B_2, a CD oldalon a C_1, C_2 és a DA oldalon a D_1, D_2 pontokhoz jutunk.

Már most mozogjon a P pont az AB oldalon és vizsgáljuk, hol helyezkednek a négyzetbe írt PQR egyenlőoldalú háromszög P, R csúcsai?

Amíg P az AA_1 közön fut végig, a Q pont a BC oldalon a B_1B_2 közön, az R csúcs a CD oldalon a C_2D közön halad végig. Ha P az A_1A_2 közön, akkor Q a B_2C, R a DD_1 közön, ha pedig P az A_2B közön, akkor Q a CC_1 és R a D_1D_2 közön fut végig. Hasonlóan áll a dolog, ha P a négyzet többi oldalán fut végig. A $PQR\,\Delta$ csúcsai közül kettő mindig a négyzet két szembefekvő oldalán helyezkedik el.



Vegyük azon esetet, amidőn P az A_1A_2 köznek valamely pontja, még pedig legyen ez először az O_1 pont, az AB ill. A_1A_2 felezőpontja. A szóbanforgó egyenlőoldalú háromszög másik két csúcsának, Q_0- és R_0-nak szimmetrikusaknak kell lenniük az AB-t merőlegesen felező egyenesre nézve, tehát $Q_0R_0 = AB$, azaz az O_1-ből kiinduló szabályos háromszög oldalának a négyzet oldalával kell egyenlőnek lennie.

Q_0R_0 felezőpontja legyen N_1. Ekkor O_1N_1 az $AB = a$ oldalú szabályos háromszög magassága, tehát $O_1N_1 = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$[1].

Ha most P az A_1A_2 köz tetszőleges pontja és az onnan kiinduló szabályos háromszög másik két csúcsa Q és R, akkor QR felezőpontja ugyancsak az AB-t merőlegesen felező egyenesen fekszik.[2] Legyen ez N'; kimutatjuk, hogy $N' \equiv N_1$. Húzzunk az N' ponton keresztül AB-vel párhuzamosat, $Q'R'$-t; $Q'R' = a$. Mivel $PN' \perp QR$ és $O'N' \perp Q'R'$, nyilván $PN'O_1\,\Delta \sim RN'R'\,\Delta$ és így

$$PN' : O_1N' = RN' : R'N' \quad \text{azaz} \quad PQ\frac{\sqrt{3}}{2} : O_1N' = \frac{1}{2}PQ : \frac{1}{2}a$$

és innen

$$O_1N' = a\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{tehát} \quad O_1N' = O_1N_1 \quad \text{ill.} \quad N' \equiv N_1.$$

---

[1] Az N_1 pont távolsága a CD oldaltól $N_1O_3 = Q_0C = \dfrac{B_2C}{2} = \dfrac{a\operatorname{tg}15^\circ}{2} = \dfrac{a(2-\sqrt{3})}{2}$. Eszerint

$$O_1N_1 + N_1O_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a(2-\sqrt{3})}{2} = a.$$

[2] Vegyük P-nek az AB-n, O_1-re szimmetrikus pontját. Az ehhez tartozó $P'Q'R'$ szab. háromszög a $PQR\,\Delta$-gel szimmetrikus az O_1O_3-ra nézve; kell tehát, hogy QR és $Q'R'$ az O_1O_3 ugyanazon pontján menjenek keresztül.

Eszerint a változó PQR szabályos háromszög QR oldala, melynek P csúcsa az A_1A_2 közön van, keresztülmegy a szilárd N_1 ponton. Ebből tehát adódik a szerkesztés:

1) Ha P az A_1A_2 közben van, a PN_1-re az N_1 pontban merőlegest állítunk és így megkapjuk a Q, R csúcsokat. A négyzet mindegyik oldalának felezőpontjához tartozik egy N pont úgy, hogy $O_iN_i = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$-es ezen N pont a négyzetnek O_i-n áthaladó szimmetriatengelyén fekszik.

2) Ha P az AA_1 közben van, akkor PN_2 meghatározza a C_2D-n az R pontot és ennek megfelelőleg kapjuk Q-t a B_1B_2 közben.

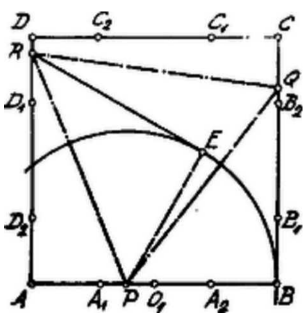
3) Ha P az A_2B közben van, akkor PN_4 határozza meg a CC_1-n a Q pontot és ennek megfelelőleg az R pontot a D_1D_2 közben.

Harsányi János (ág. ev. g. VIII. o. Bp.)

Jegyzet. A feladat eredeti szövegében sajtóhibával „kerületi pont” helyett „területi pont” állott. Utóbbi szövegezés mellett a szerkesztés vizsgálata jelentékenyen terjedelmesebb; minthogy a feladat kitűzője is csak „kerületi” pontokra gondolt, most az előadottakra szorítkozunk, jóllehet a közölt megoldás szerzője a sajtóhibás szövegnek is megfelelőleg dolgozott.

II. Megoldás. Az előbbi megoldás bevezetésében foglaltakat szem előtt tartva, legyen P az AB oldal valamely pontja az A_1A_2 közön; ekkor a Q a B_2C, az R a DD_1 köz valamely pontja lesz.

Ha a Q-pontot 60°-al elforgatjuk P körül – a pozitív irányban – akkor Q pont az R-be esik; ha a BC-oldalt P körül 60°-kal elforgatjuk, akkor a BC oldal Q pontjának a DA oldal R pontjába kell esnie.



A szerkesztés ezen alapon a következő: PB sugárral kört szerkesztünk és ezen kijelöljük az E pontot úgy, hogy $BE = 60°$ legyen. Az E pontban a körhöz érintőt húzunk; ezen érintő helyzetét veszi fel a BC egyenes, ha P körül 60°-kal elforgattuk, amikor is B az E-be kerül. Ezen érintő a DA oldalt az R pontban metszi úgy, hogy PR lesz a P-ből kiinduló, a négyzetbe írt szab. háromszög oldala. A PR sugárral P-ből szerkesztett kör BC-t a Q pontban metszi.

Minthogy a $PBQ\,\Delta \cong PER\,\Delta$[3] és $PBQ\,\Delta$ 60°-os forgatással kerül a $PER\,\Delta$ helyzetébe, nyilván $QPR\sphericalangle = 60°$ és így a $PQR\,\Delta$ egyenlőoldalú.

Tésy Gabriella (Szent Margit leányg. VIII. o. Bp. XI.)

[3]Két oldal és a nagyobbikkal szemben fekvő szög (90°) egyenlő