Az

$$m(x+y)-xy=m$$

egyenletet

(1) $$(x-m)(y-m)=m^2-m\ldots$$

alakban írhatjuk és ebből világosan kitűnik, hogy oly egyenlőszárú hiperbolával van dolgunk, melynek aszimptotái az

$$x=m, \quad y=m$$

egyenesek.[1] Ha $m=0$, akkor a hiperbola egyenlete $xy=0$, azaz a hiperbola a koordináta-rendszer tengelyeiből álló egyenespárrá fajul. Ha $m=1$, akkor a hiperbola egyenlete:

$$(x-1)(y-1)=0,$$

azaz szintén egyenespárral van dolgunk, mely az $x=1$, $y=1$ egymásra merőleges egyenesekből áll.

Ha $m\neq 0$ és $m\neq 1$, akkor a hiperbola helyzete – és ennek megfelelőleg az y függvény változása – kétféle lehet, aszerint, amint

$$m^2-m \gtrless 0.$$

I.

$$m^2-m=m(m-1)>0, \quad \text{ha} \quad m<0 \quad \text{vagy} \quad m>1.$$

Ekkor a hiperbola az $x=m$ és $y=m$ egyenesekhez viszonyítva az $x<m$ és $y<m$, ill. az $x>m$ és $y>m$ relációk által meghatározott síkrészekben (első és harmadik negyedben) fekszik. Az y függvény változását a köv. táblázat mutatja:

x	$-\infty$	$\ldots$	m	m	$\ldots$	$+\infty$
y	m	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	m

Azaz: y folyton fogy; $x=m$ helyen szakadása van.

II. $m^2-m=m(m-1)<0$, ha $0<m<1$. Ebben az esetben a hiperbola ágai az $x<m$, $y>m$, ill. $x>m$, $y<m$ relációk által meghatározott síkrészekben (második és negyedik síknegyedben) feküsznek. Az y függvény változását mutatja:

x	$-\infty$	$\ldots$	m	m	$\ldots$	$+\infty$
y	m	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	m

A függvény értéke folyton növekedik; az $x=m$ helyen szakadása van.

2^0. Ha $m\neq 0$, akkor, mivel

$$x+y=1 \quad \text{és} \quad xy=m^2,$$

x és y az

$$u^2-u+m^2=0$$

egyenlet gyökei. Ezek valósak, ha $1-4m^2\geq 0$, azaz $|m|\leq \frac{1}{2}$,
és

$$x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4m^2}),\ y=\frac{1}{2}(1\mp\sqrt{1-4m^2}).$$

A gyökök szerkesztése: megszerkesztjük a félkört, melynek átmérője az egység. Az átmérővel párhuzamosan, az átmérőtől $|m|$ távolságban egyenest húzunk, amely a félkört metszi, ha $|m|<\frac{1}{2}$, érinti, ha $|m|=\frac{1}{2}$. A metszéspontnak az átmérőn való vetülete az átmérőt két részre osztja; ezek egyike x, a másika y.

Ha $|m|=\frac{1}{2}$, akkor $x=y=\frac{1}{2}$.

Mandl Béla (Zrínyi Miklós rg. VII. o. Bp. VIII.).

[1] Úgy foghatjuk fel a dolgot, mintha a koordinátarendszer tengelyeit önmagukkal párhuzamosan eltoltuk volna.

Jegyzet. Mindazon hiperbolák, melyeket az 1) egyenlet a változó m paraméterrel meghatároz, keresztülmennek az $(1,\ 0)$ és $(0,\ 1)$ pontokon. Az I. csoporthoz tartozó hiperboláknak azon ága, mely vagy az $x < m,\ y < m$, vagy az $x > m$, $y > m$ síkrészben fekszik, mind a két ponton megy keresztül A II. csoporthoz tartozó hiperboláknak egyik ága az $(1,\ 0)$, a másik ága a $(0,\ 1)$ ponton megy keresztül.

Ha 1)-ből

$$y = \frac{m(x-1)}{x-m}$$

akkor

$$y' = \frac{m(1-m)}{(x-m)^2}$$

y' előjele m megadott értékénél állandó előjelű, tehát a megoldásban jellemzett változást igazolja.

Végül megjegyezzük, hogy a feladat sajtóhibával látott napvilágot. Ezen körülmény a feladatot egyszerűbbé tette.