A G_3 és G_2 görbék közös pontjait az

(1) $$y = 2x^3 - 8x\ldots$$

(2) és $$y = mx^2 - 8x\ldots$$

egyenletekből álló rendszer gyökei határozzák meg. y kiküszöbölésével

(3) $$2x^3 - 8x = mx^2 - 8x \qquad \text{ill.} \qquad 2x^3 - mx^2 \equiv x^2(2x - m) = 0\ldots$$

Ezen egyenletnek $x = 0$ kétszeres gyöke. Az $(x = 0,\ y = 0)$ pont, azaz az origo a két görbének érintkezési pontja. Ezen kívül még

$$2x - m = 0, \qquad \text{ill.} \qquad x = \frac{m}{2}, \quad y = \frac{m^3}{4} - 4m$$

értékpár határoz meg egy közös pontot, t. i. A-t. Az $OA \equiv e$ egyenes egyenlete

(4) $$y = \frac{m^2 - 16}{2}x\ldots$$

A G_3 görbe zérus helyeit a $2x^3 - 8x \equiv 2x(x^2 - 4) = 0$
egyenlet gyökei szolgáltatják; ezek $x_1 = 0$, $x_2 = +2$, $x_3 = -2$.
A zérus helyek koordinátái: $(0, 0)$, $(+2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$.
A $(+2,\ 0)$ pontból az e-re bocsátott merőleges egyenes egyenlete

(5) $$y = \frac{2}{16 - m^2}(x - 2)\ldots$$

A 4) és 5) egyenes metszéspontjának M_1-nek koordinátáit, mint m^2 függvényeit kapjuk meg a 4) és 5) egyenletekből. Ha tehát e két egyenletből m^2-et kiküszöböljük, x és y, azaz az M_1 koordinátái között kapunk egy egyenletet, azon görbéét, amelynek pontja M_1.
4)-ből

$$m^2 = \frac{2y + 16x}{x},$$

5)-ből

$$m^2 = \frac{16y - 2x + 4}{y}.$$

Eszerint

(6) $$\frac{2y + 16x}{x} = \frac{16y - 2x + 4}{y}\ldots$$

Rendezés után

(7) $$x^2 + y^2 - 2x = 0, \qquad \text{ill.} \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1\ldots$$

azon kör egyenlete, amelynek pontja M_1. Ezen kör középpontja az X-tengelyen van, keresztülmegy az origon, sugara 1.

Az M_2 pontra nézve pedig

(8) $$(x + 1)^2 + y^2 = 1\ldots$$

oly kör egyenlete, mely az előbbivel szimmetrikus az Y-tengelyre nézve.

Ha t. i. a $(-2,\ 0)$ pontból e-re merőlegest bocsátunk, ennek egyenlete

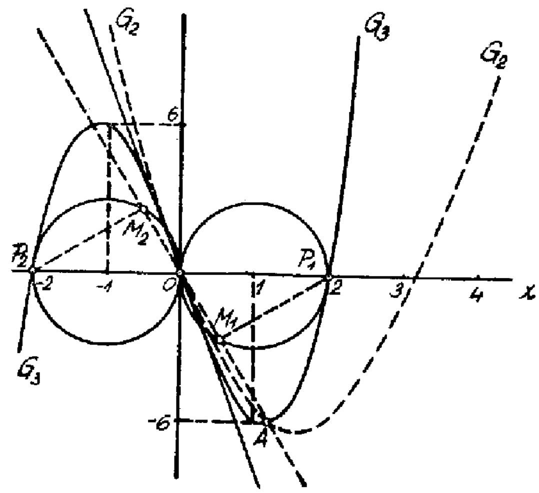
$$y = \frac{2}{16 - m^2}(x - 2).$$

Ennek megfelelőleg 6) jobboldalán $+4$ helyett -4 és így $x^2 + y^2 + 2x = 0$ keletkezik.

Kérdés már most: leírja-e M_1 az egész körvonalat, amelynek egyenlete a 7), ill. M_2 azon körvonalat, amelynek egyenlete 8)? Hogy ezen kérdésre felelhessünk, szükséges és elegendő, hogy a 4) alatti $OA \equiv e$ egyenes helyzetét vizsgálhassuk, azaz ennek irányhatározója felvesz-e minden értéket $-\infty$-től $+\infty$-ig?

Az e egyenes irányhatározója: $\dfrac{m^2 - 16}{2}$. Ennek értéke, ha m változik $-\infty$-től $+\infty$-ig, $+\infty$-től csökken -8-ig, azután növekszik -8-tól $+\infty$-ig; tehát nem veszi fel azon értékeket, melyek -8 és $-\infty$ között vannak. Ebből következik, hogy az e egyenes, mely O körül forog, nem vesz fel minden helyzetet. Az O ponthoz tartozó sugársor sugarai közül kimaradnak azok, melyeknek irányhatározói -8 és $-\infty$ között vannak. Ezen kimaradó egyeneseken fekvő M_1, ill. M_2 pontok nem tartoznak a mértani helyhez. Más szóval, az M_1 mértani helye a *7) alatti kör egy része;* a 7) alatti körből azon ívet kell elvennünk, melyet az $y=-8x$ egyenes vág le róla. Ezen íven fekvő pontokra nézve

$$0<x<\frac{2}{65} \quad \text{és} \quad y<0.^{1}$$



Hasonlóan az M_2 pontok mértani helye a *8) kör egy része.* Ezen körből azon ívet kell elvennünk, melynek pontjaira nézve

$$-\frac{2}{65}<x<0 \quad \text{és} \quad y>0.$$

(A két körből kieső ívrész szimmetrikus helyzetű az O pontra nézve).

Vizsgáljuk már most közelebbről a geometriai viszonyokat. A G_3 oly szilárd harmadrendű parabola, mely az X-tengelyt a -2, 0, $+2$ helyeken metszi; a $(0,\ 0)$ pont a görbe inflexiós pontja és itt az érintő irányhatározója -8. (Egyenlete $y=-8x$). A görbének $x=-2$ és $x=0$ között felső, $x=0$ és $x+2$ között alsó tetőpontja van: az előbbi koordinátái $x_1 \overset{\infty}{=} -1{,}15$, $y_1 \overset{\infty}{=} 6{,}1$, az utóbbié $x_2 \overset{\infty}{=} +1{,}15$, $y_2 \overset{\infty}{=} -6{,}1$ [2]

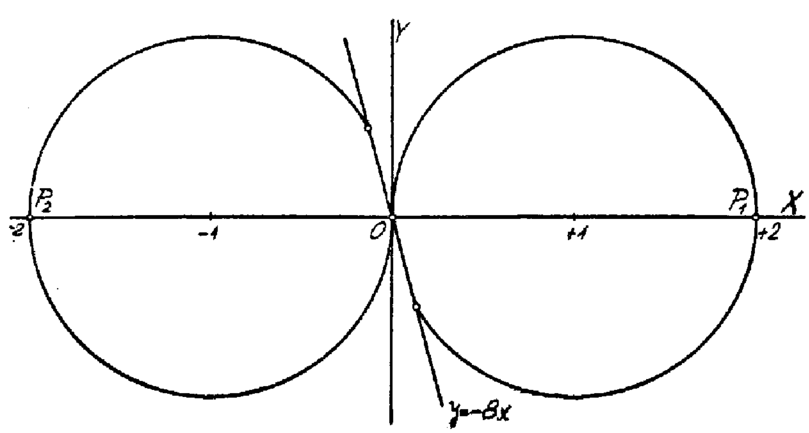
A G_2 az m értéke szerint *változó* másodrendű parabola, de mindegyik keresztülmegy az origon és ezen pontban mindegyiknek érintője az $y=-8x$ egyenes, azaz G_2 és G_3 a $(0,\ 0)$ pontban érintkeznek.

Ha $m=0$, akkor a G_2 parabolából az $y=-8x$ egyenes lesz.

Ha $m>0$, akkor G_2-nek alsó tetőpontja van az $x=\dfrac{4}{m}$ helyen. G_2 a G_3-t az X-tengely pozitív oldalán metszi az $A\left(\dfrac{m}{2}, \dfrac{m^3}{4}-4m\right)$ pontban. Ezen metszéspont végig fut a G_3-nak azon részén, mely az X-tengely pozitív oldalán fekszik. Az OA egyenes határhelyzete azonban az $y=-8x$ egyenes.[3]

Az $y=ax$ egyenesek közül azoknak, amelyekre nézve $a<-8$, nincs a G_3 görbével (az origon kivül) közös pontjuk.

Ha $m<0$, akkor G_2-nek felső tetőpontja van az $x=\dfrac{4}{m}$ helyen. G_2 a G_3-t az X-tengely negatív oldalán metszi az A pontban. Ezen metszéspont végig fut a G_3-nak azon részén, mely az X-tengely negatív oldalán fekszik. Az OA egyenes határhelyzete ugyanaz, mint előbb.



[1] Az $x^2+y^2-2x=0$ és az $y=-8x$ egyenes közös pontjai az $x=0$ és $x=\dfrac{2}{65}$ abszcisszákhoz tartoznak.

[2] $y=2x^3-8x$ esetében $y'=6x^2-8=0$, ha $x^2=\dfrac{4}{3}$, $x \overset{\infty}{=} \pm 1{,}15$.

[3] Ha $m=0$, akkor az A pont O-ba esik. Ekkor OA a G_3 inflexiós érintője lesz.

Ha az $y = ax$ egyenesre[4] a $P_1(2,\ 0)$ pontból merőlegest állítunk, akkor ennek talppontja M_1, Thales tétele szerint oly körön fekszik, melynek átmérője az OP_1 távolság. Az M_1 azonban nem írja le ezen kört egészen: kimaradnak azon pontjai, amelyek az $y = ax$ sugársor azon egyenesein feküsznek, amelyekre nézve $a < -8$.

Ha pedig az $y = ax$ egyenesre a $P_2(-2,\ 0)$ pontból állítunk merőlegest, ennek M_2 talppontja oly körön fekszik, amelynek átmérője OP_2. Az M_2 azonban nem írja le egészen ezen kört: kimaradnak e kör azon pontjai, amelyek az $y = ax$, $a < -8$ egyeneseken feküsznek.

Forgassuk az O ponton átmenő egyenest az Y-tengelynek megfelelő kezdőhelyzetből a pozitív forgási irányban, míg az $y = -8x$ egyenes helyzetébe jut; *ezen forgás közben leírt síkrészen fekvő pontjai a két körnek nem tartoznak az M pont mértani helyéhez.*

[4] Ahol $a \geq -8$.