Az $y=ax^2+bx+c$ görbe (x_1,y_1) pontjában húzott érintő irányhatározója

$$(1)\qquad m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}=\left(3ax^2+b\right)_{x=x_1}=3ax_1^2+b\ldots$$

és az érintő egyenlete

$$(2)\qquad y-y_1=m(x-x_1)\ldots$$

Az érintőnek és a görbének közös pontjait az

$$y=ax^3+bx+c\quad \text{és}\quad y=m(x-x_1)+y_1$$

egyenletekből álló rendszer megoldásai adják meg. y kiküszöbölésével a közös pontok abcisszái az

$$(3)\qquad ax^3+bx+c=m(x-x_1)+y\quad \text{ill}\quad ax^3(b-m)x+c+mx_1-y_1=0\ldots$$

egyenlet gyökei. Minthogy (1)-ből $\qquad b-m=-3ax_1^2$

és

$$c+mx_1-y_1=c-\left(3ax_1^2+bx_1-ax_1^3-b\right)x_1-c=2ax_1^3,$$

a (3) egyenlet a következő alakban írható:

$$(3a)\qquad ax^3-3ax_1^2x+2ax_1^3=0,\quad \text{ill.}\quad x^3-3x_1^2x+2x_1^3=0\ldots$$

Ezen egyenletnek az érintkezés miatt x_1 a kétszeres gyöke; ha a harmadik gyök α, akkor a három gyök összege, mivel x^2 együtthatója eltűnt,

$$2x_1+\alpha=0$$

és így

$$\alpha=-2x_1,\quad \beta=-8ax_1^3-2bx_1+c$$

a görbének és az $(x_1,\ y_1)$ pontjában húzott érintőnek M metszéspontját határozzák meg.

Az MT távolság felezőpontjának koordinátái

$$\xi=\frac{x_1+\alpha}{2}=\frac{x_1-2x_1}{2}=-\frac{x_1}{2},\quad \eta=\frac{y_1+\beta}{2}=\frac{-7ax_1^3-bx_1+2c}{2}.$$

$x_1=-2\xi$ helyettesítésével

$$\eta=28\alpha\xi^3+b\xi+c\quad \text{vagy}\quad y=28ax^3+bx+c$$

lesz az MT távolság felezőpontjának mértani helye.

Pálos Peregrin (Bencés rg. VIII. o. Pápa.)

Jegyzet. A $3a$) egyenletben a gyökök szorzata

$$-2x_1^3=x_1^2\alpha,\quad \text{azaz}\quad \alpha=-2x_1.$$

A $3a$) egyenletet $x=x_1$ kielégíti. De $x=x_1$, kielégíti a

$$3x^2-3x_1^2=0$$

egyenletet is; ezen egyenlet baloldala a $3a$) baloldalának differenciálhányadosa. Ugyanis az $f(x)=0$ egyenlet kétszeres gyöke az $f'(x)=0$ egyenletnek is gyöke.

Az $(x=0,\ y=c)$ pont úgy az adott görbének, mint az M pont mértani helyének közös pontja, még pedig inflexiós pontjuk. Az inflexiós pontban összeesik a T és az M, és így az MT felezőpontja is ide esik.