

A parabola egyenlete legyen: $y^2 = 2px$. A parabola csúcsa a koordinátarendszer kezdőpontja, a parabola tengelye az X -tengelye.

A parabola csúcsán átmenő e egyenes egyenlete: $y = mx$.

Az erre merőleges f egyenes egyenlete: $y = -\frac{1}{m}x$.

Az e egyenes a parabolát a csúcspontján kívül még egy pontban metszi. Ennek koordinátái az

$$y^2 = 2px \quad \text{és} \quad y = mx$$

egyenletekből álló rendszert elégítik ki. Az y kiküszöbölésével

$$m^2x^2 = 2px \quad \text{és innen} \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{m^2}{2p}.$$

$x_1 = 0$ mellett $y_1 = 0$. Ez a parabola csúcsa. x_2 -höz tartozik $y_2 = \frac{2p}{m} \cdot (x_2, y_2)$, az e egyenesnek és a parabolának másik metszéspontja, A .

Hasonlóan

$$y^2 = 2px \quad \text{és} \quad y = -\frac{1}{m}x$$

egyenletrendszer megoldásai az f egyenes és a parabola metszéspontjait határozzák meg. y kiküszöbölésével

$$\frac{x^2}{m^2} = 2px \quad \text{és innen} \quad x'_1 = 0, \quad x'_2 = 2pm^2.$$

$x'_1 = 0$ mellett $y'_1 = 0$; ez a parabola csúcsa. x'_2 -höz tartozik $y'_2 = -2pm$. (x'_2, y'_2) az f egyenesnek és a parabolának másik metszéspontja, B .

Nyilván az AB húr a parabola csúcsából derékszög alatt látszik. Ha A' az A és B' a B szimmetrikus pontja a parabola tengelyére (X -tengely) nézve, akkor $A'B'$ is derékszög alatt látható a parabola csúcsából; azonban így AB és $A'B'$ metszéspontja az X -tengelyen fekszik. Azt kell tehát kimutatnunk, hogy az AB húrnak az X -tengellyel való metszéspontja független az m értékétől.

Az A , B pontokon átmenő egyenes egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{2p}{m^2} & \frac{2p}{m} & 1 \\ 2pm^2 & -2pm & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ill.} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2p & 2pm & m^2 \\ 2pm^2 & -2pm & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Ha } y = 0, \text{ akkor } (2pm + 2pm^3)x + (-4p^2 - 4p^2m^3) = 0$$

és innen

$$x = 2p.$$

Az AB húr ez X -tengelyt $-m$ értékétől függetlenül – oly pontban metszi, amelynek a parabola csúcsától való távolsága a csúcspont és a gyújtópont távolságának $\left(\frac{p}{2}\right)$ négyszerese.

Huhn Péter (Kegyesrendi g. VIII. o. Szeged)

Jegyzet. Ha $m = 1$, akkor AB merőleges az X -tengelyre és $x_3 = 2p - x'_2$. Megoldásunkban azért választottuk a két ponton átmenő egyenes egyenletének determinánssal való felírását, mert ebben mindkét pont egyformán szerepel.