Egyenletünkben a négyzetgyök, mint x-nek egyértékű függvénye, szerepel, jelentsen tehát pozitív számot, esetleg zérust. Ebből következik, hogy egyenletünket csak $x \geq 2$ érték elégíti ki.

Tegyük fel tehát, hogy $c \geq 2$. Ha két pozitív szám egyenlő, négyzetük is egyenlő és viszont ilyen értelemben az 1) egyenlet ekvivalens a

$$2x^2 + 2x - m = (x-2)^2 \quad \text{vagyis} \quad x^2 + 6x - (m+4) = 0 \ldots \qquad 2)$$

egyenlettel. Megjegyezhetjük, hogy x minden oly valós értéke mellett, mely a 2)-t kielégíti. $2x^2 + 2x - m$ értéke négyzetté, tehát pozitívvá válik.

Vizsgáljuk tehát az

$$f(x) = x^2 + 6x - (m-4) \text{ fggvnyt.} f(2) = 12 - m.$$

I. Ha $m > 12$, $f(2) < 0$. Ebből következik, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek két gyöke van [1]; a két gyököt 2 elválasztja, azaz az egyik gyök nagyobb, a másik kisebb, mint 2. Eszerint a nagyobbik gyök az 1) egyenlet megoldása.

II. $m = 12$ mellett $f(2) = 0$, azaz az $f(x) = 0$ egyik gyöke 2. Ez kielégíti az 1)-t is, t. i. $m = 12$ esetében $x = 2$ helyettesítésével az egyenlet mindkét oldala eltűnik. Az egyenlet másik gyöke -8; ez azonban nem elégíti ki az 1)-et.

III. Ha $m < 12$, akkor $f(2) > 0$. Most már azt is meg kell vizsgálnunk, hogy vannak-e $f(x)$-nek negatív értékei, ill. valós zérushelyei. Erre nézve a diszkrimináns szolgál felvilágosításul:

$$D \equiv 36 + 4(m+4) = 4(m+13).$$

Ha $m < -13$, akkor 2)-nek nincsenek valós gyökei.

Ha $-13 < m < +12$, akkor 2)-nek két valós gyöke van. Minthogy $f(2) > 0$, mind a két gyök 2-höz viszonyítva ugyanolyan helyzetű. Tekintettel arra, hogy a gyökök félösszege $-3 < 2$, mind a két gyök kisebb 2-nél, tehát egyik som felel meg 1)-nek.

Összefoglalva a mondottakat: az 1) egyenletnek csak egy megoldása van, még pedig akkor, ha $m > 12$.

Bencze József (Ferenc József g. VIII. o. Kőszeg)

Jegyzet. A feladat megoldására még számos dolgozat érkezett. Ezek nem voltak figyelembe vehetők, mert csak a 2) egyenlet megoldásával foglalkoztak. Holott *itt az volt a lényeges*, hogy megvizsgáljuk, megfelelnek-e a 2) egyenlet gyökei az irracionális egyenletnek?

Azon célból, hogy a megoldás jelentését kidomborítsuk, kitűztük ezen feladat geometriai értelmezését. (L. ezen számban az 1300. feladatot.)

A másik szempont, amire munkatársaink figyelmét felhívni óhajtom, hogy a vizsgálatokat lehetőleg függvénytani oldaláról végezzék, annál inkább, mivel tananyagunkat is ebben a irányban dolgozzuk fel.

[1] $f(x)$ az x-nek oly másodfokú függvénye, amelyben x^2 együtthatója pozitív. Értékkészletében negatív és pozitív értékek is vannak.