I. Megoldás. Jelölje t a háromszög területét és tekintsük az

$$y = t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Adataink szerint $b = kc$ és

$$2s = a + kc + c = a + (k+1)c; \quad 2(s-a) = (k+1)c - a;$$

$$2(s-b) = a - (k-1)c; \qquad 2(s-c) = a + (k-1)c.$$

Így

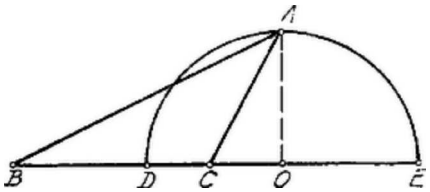
$$8y = \left[(k+1)^2c^2 - a^2\right]\left[a^2 - (k-1)^2c^2\right]$$

$$8y = -\left(k^2-1\right)^2c^4 + 2\left(k^2+1\right)a^2c^2 - a^4.$$

Eszerint y oly másodfokú függvénye c^2-nek, amelynek maximuma van, ha

$$c^2 = \frac{\left(k^2+1\right)a^2}{\left(k^2-1\right)^2}.$$

Lóránd Endre (Kemény Zsigmond rg. VIII. o. Bp. VI.).



II. Megoldás. Minthogy az $ABC\Delta$ $BC = a$ oldala adott, az A csúcsra nézve pedig

$$AC : AB = k : 1,$$

az A pont mértani helye egy Apollónius-féle kör. Ezen kör O középpontja a BC egyenesen fekszik és ezt a D és E pontokban metszi úgy, hogy[1]

$$BD : DC = 1 : k \quad \text{és} \quad BE : CE = 1 : k.$$

Minthogy[2]

$$BD + DC = a, \qquad \text{azért} \qquad BD = \frac{a}{1+k}, \qquad DC = \frac{ak}{1+k},$$

$$BE - CE = a, \qquad \text{ezért} \qquad BE = \frac{a}{1-k}, \qquad CE = \frac{ak}{1-k}.$$

A szóbanforgó kör átmérője $DC + CE - \dfrac{2ak}{1-k^2}$.

Az $ABC\ \Delta$ területe akkor legnagyobb, ha a BC oldalhoz tartozó magassága a legnagyobb, tehát akkor, amidőn az A vetülete a BC-n 0. A háromszög magassága ekkor

$$AO = \frac{1}{2}DE = \frac{ak}{1-k}, \quad \text{és} \quad c^2 = \overline{AB^2} - \overline{AO^2} + \overline{BO^2}.$$

Azonban $$BO = BD + DO = \frac{a}{1+k} + \frac{ak}{1-k^2} = \frac{a}{1-k^2}.$$

így $c^2 = \left(\dfrac{a}{1-k^2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{1-k^2}\right)^2 = \dfrac{a^2\left(1+k^2\right)}{\left(1-k^2\right)^2}$.

e^2 ezen értéke mellett legnagyobb az adott feltételeknek megfelelő háromszög területe.

Holzer Pál (Faludi Ferenc rg. VI. o. Szombathely).

---

[1] (B, C) és (D, E) harmonikus pontpárok. Ha valamely, a feltételnek megfelelő A pontot kijelöltünk, akkor a $BAC\sphericalangle$-et és a mellékszögét felező egyenesek meghatározzák a BC egyenesen a D és E pontokat.

[2] Ábránk szerint $k < 1$. Az eredmény ugyanaz, ha $k > 1$.