I. Megoldás. A szóbanforgó kombinációk között vannak olyanok, amelyekben egy elem sem ismétlődik. Ezek száma $\binom{n}{k} = \binom{k}{o}\binom{n}{k}$.[1]

Vannak köztük olyanok, amelyekben csak egy elem szerepel kétszer. Ezek az n elem $(k-1)$-ik osztályú, ismétlés nélküli kombinációiból képezhetők úgy, hogy a kombinációkban szereplő $(k-1)$ elem egyikét hozzákapcsoljuk. Így az $\binom{n}{k-1}$ számú csoport mindegyikéből $\binom{k-1}{1}$ új csoport nyerhető, összesen tehát $\binom{k-1}{1}\binom{n}{k-1}$.

Vannak köztük olyanok, amelyekben 2 elem fordul elő kétszer. Ezek a $(k-2)$-ik oszt. ismétlés nélküli kombinációkból képezhetők úgy, hogy a bennük előforduló $(k-2)$ elemből két-két elemet csatolunk hozzájuk. Így az $\binom{n}{k-2}$ számú csoport mindegyikből $\binom{k-2}{2}$ új csoport nyerhető, összesen tehát $\binom{k-2}{2}\binom{n}{k-1}$.

Általában nézzük azokat a csoportokat, amelyekben éppen r számú elem fordul elő kétszer, tehát $2r \leqq k$.

Az ilyen csoportokat a $(k-r)$ oszt. ismétlés nélküli kombinációkból képezhetjük úgy, hogy a bennük előforduló $(k-r)$ elemből kiválasztunk r elemet és ezeket csatoljuk hozzájuk. Így a $\binom{n}{k-r}$ számú – ismétlés nélküli csoport mindegyikéből $\binom{k-r}{r}$ új – ismétléses – csoportot nyerünk, amelyben éppen r elem éppen kétszer fordul elő; ezek száma tehát

$$\binom{k-r}{r}\binom{n}{k-r}.$$

Ezen szorzatok értékét kell vennünk és összegeznünk, ha

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ r\ \ldots \left[\frac{k}{2}\right].$$

Eszerint a keresett csoportok száma

$$\sum_{r-0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \binom{n}{k-r}\binom{k-r}{r}$$

ahol $\left[\frac{k}{2}\right]$ jelenti a $\frac{k}{2}$-ben foglalt legnagyobb egész számot.

Földesi Tamás (Berzsenyi Dániel rg. VIII. o. Bp. V.).

II. Megoldás. n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációk száma: $\binom{n+k-1}{k}$.

Ebből a számból ki kell vonnunk azon ismétléses kombinációk számát, melyben egy elem 2-nél többször szerepel. Ezekben tehát egy elemnek legalább 3-szor kell szerepelnie; a fennmaradó $k-3$ helyét *valamennyi* n elem $(k-3)$-ad osztályú ismétléses kombinációi foglalják el. Így tehát egy bizonyos elem $\binom{n+k-4}{k-3}$ kombinációban szerepel legalább háromszor. Mivel pedig bármelyik elem szerepelhet ily módon, az így nyert összes kombinációk száma: $n\binom{n+k-4}{k-3}$.

A szóbanforgó csoportok száma eszerint

$$\binom{n+k-1}{k} - n\binom{n+k-4}{k-3} = \frac{(n-k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)n}{k!} - \\ - \frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)n^2}{(k-3)!}.$$

Mandl Béla (Zrinyi Miklós rg. VII. o. Bp. VIII.).

Jegyzet. A két megoldás egybevetéséből következik ezen összefüggés:

$$\sum_{r=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \binom{n}{k-r}\binom{k-r}{r} = \binom{n+k-1}{k} - n\binom{n+k-4}{k-3}.$$

---

[1] $\binom{k}{o} = \binom{k}{k} = 1.$