



Az AOB , ABC , CDE ... hegyes szögek mind egyenlők egymással, mivel a sorrendben egymást követők megfelelő szárai egymásra merőlegesek; tehát mindegyik $= \alpha$, úgy hogy

$$\begin{aligned} OA &= a, & AB &= OA \sin AOB = a \sin \alpha; \\ BC &= AB \cos ABC = a \sin \alpha \cos \alpha, \\ CD &= BC \sin ABC = a \sin^2 \alpha \cos \alpha, \\ DE &= CD \cos CDE = a \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \quad \text{s. i. t.} \end{aligned}$$

A szóbanforgó törtvonal tehát kétféle mértani sor összege; az egyik összeg

$$\begin{aligned} S_1 &= a + a \sin \alpha \cos \alpha + a \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \dots + a \sin^n \alpha \cos^n \alpha + \dots = \\ &= a \left[1 + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} \right)^n \right] = a \frac{1 - \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{\sin 2\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor, mivel $0 < \frac{\sin 2\alpha}{2} < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_1 = \frac{2a}{2 - \sin 2\alpha}.$$

A másik összeg

$$\begin{aligned} S_2 &= a \sin \alpha + a \sin^2 \alpha \cos \alpha + a \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha + \dots + a \sin^{n+1} \alpha \cos^n \alpha = \\ &= a \sin \alpha \left[1 + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} \right)^n \right] = \\ &= a \sin \alpha \frac{1 - \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{\sin 2\alpha}{2}}, \end{aligned}$$

és $\lim_{n \rightarrow \infty} S_2 = \frac{2a \sin \alpha}{1 - \sin 2\alpha}$.

Az $OABCDE$... törtvonal hossza, ha a részek száma vég nélkül növekedik

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} S_2 = \frac{2a(1 + \sin \alpha)}{2 - \sin 2\alpha}.$$

Esztó Zoltán (Bencés g. VII. o. Sopron).