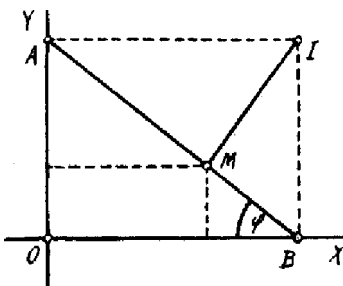


I. Megoldás. Jelentse A a vonaldarabnak az Y tengelyen, B az X -tengelyen mozgó végpontját. Az A ill. B pont által leírt ellipszis egy vonaldarabbá zsugorodik össze, az előbbi az Y -, utóbbi az X -tengelyen fekszik. Az A ponthoz tartozó normális merőleges az Y -, a B ponthoz tartozó merőleges az X tengelyre; ezen két merőleges metszéspontja legyen I . Ki fogjuk mutatni, hogy az AB tetszőleges M pontjához tartozó normális az I ponton megy keresztül.



Legyen $AM = a$, $MB = b$, $AB = a + b$. A vonaldarab helyzetét az $OBA \sphericalangle = \varphi$ határozza meg. Ezen helyzetben az M pont koordinátái (x, y) , az I ponté (x_1, y_1) , úgy hogy

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi;^1$$

$$x_1 = OB = (a + b) \cos \varphi, \quad y_1 = OA = (a + b) \sin \varphi.$$

Az MI egyenes irányhatározója:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{(a + b) \sin \varphi - b \sin \varphi}{(a + b) \cos \varphi - a \cos \varphi} = \frac{a \sin \varphi}{b \cos \varphi}.$$

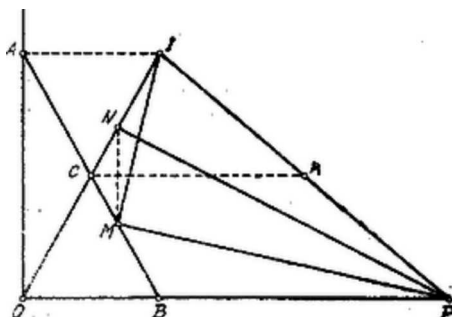
Az M pont által leírt ellipszis M pontjához tartozó normális irányhatározója $-\frac{x'}{y'}$,² ahol y' és x' jelentik y -nak és x -nek φ szerint képezett differenciálhányadosait és így

$$-\frac{x'}{y'} = \frac{a \sin \varphi}{b \cos \varphi} - \frac{y_1 - y}{x_1 - x}.$$

Tehát az M ponthoz tartozó normális iránya összeesik MI irányával, a szóbanforgó normális az I ponton megy keresztül.

Frankl Ottó (izr. rg. VIII. o. Bp.)

II. Megoldás. Az előbbi megoldás bevezetésében jellemeztük az AB vonaldarab és az M pont helyzetét. Feltehetjük, hogy $AM > MB$. Legyen C az AB felezőpontja. Az M pontból OA -val párhuzamosan vont egyenes OC -t az N pontban metszi; ekkor $CM = CN$ és így $ON = AM$, az ellipszis félnagy tengelye ill. a főkör sugara. Eszerint az N pont a főkör azon pontja, melynek affin pontja az ellipszisen az M . A főkörnek N pontjában húzott érintője OB -t a P pontban metszi; ezért az ellipszisnek M pontjához tartozó érintője MP . Az ellipszisnek M pontjához tartozó normális MP -re merőleges és OC -t az I pontban metszi.



Az IMP és INP derékszögű háromszögek IP átfogójának K felezőpontja az I, N, M, P pontokon átmenő kör középpontja. Ezért az MN távolságot merőlegesen felező egyenes – az OB -vel párhuzamos – keresztül megy a K ponton, továbbá – mivel $CM = CN$ – a C ponton is. Minthogy K felezi IP -t és $CK \parallel OB$, következik: $OI = 2OC$, azaz az M ponthoz tartozó normális OC -t mindig azon szilárd I pontban metszi, amelyre nézve $OI = 2OC$. ($OAI B$ téglalap csúcsa I .)

Komlós János (Gr. Széchenyi István gyakorló r. VII. o. Pécs).

¹ Az ellipszis egyenlete $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$.

² Az érintő irányhatározója: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} : \frac{dx}{d\varphi} = \frac{y'}{x'}$; a normálisé $-1 : \frac{y'}{x'} = -\frac{x'}{y'}$.