I. Megoldás. Ha két kör az

(1) $$x^2+y^2+A_1x+B_1y+C_1=0\ldots$$

(2) ill. $$x^2+y^2+A_2x+B_2y+C_2=0\ldots$$

egyenletek által van megadva, akkor annak, hogy a két kör merőlegesen messe egymást, szükséges és elégséges feltétele:

(3) $$A_1A_2+B_1B_2=2(C_1+C_2)\ldots$$

Az adott (1) körre nézve: $A_1=2$, $B_1=0$, $C_1=0$. A keresett (2) körre nézve A_2, B_2, C_2 ismeretlenek. Ezek kiszámítására három egyenletre van szükség. Az elsőt szolgáltassa a (3) feltétel; ebbe helyettesítve A_1, B_1, C_1 értékét, keletkezik

(4) $$2A_2-2C_2,\quad \text{azaz}\quad A_2-C_2\ldots$$

A (2) kör keresztül megy $(0,\ 1)$ ill. $(1,\ 0)$ ponton, ha ennek koordinátái kielégítik a (2) egyenletet. Kell tehát, hogy

(5) $$1+B_2+C_2=0\ldots$$

(6) és $$1+A_2+C_2=0\ldots$$

egyenletek álljanak fenn, amelyekből (4) és (6) alapján

$$1+2A_2=0,\quad \text{tehát}\quad A_2=C_2=-\frac{1}{2}\ \text{ és (5)-ből }\ B_2=-\frac{1}{2}.$$

A keresett kör egyenlete eszerint

$$x^2+y^2-\frac{x+y+1}{2}=0\quad\text{vagy}\quad\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{8}.$$

A keresett kör középpontja $\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ és sugara $\sqrt{\frac{5}{8}}$.

II. Megoldás. Az adott kör egyenletét

(1) $$(x+1)^2+y^2=1\ldots$$

alakban írva, kiolvashatjuk belőle, hogy középpontjának koordinátái $(-1,\ 0)$ és sugara $r=1$.

A keresett kör egyenlete:

(2) $$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2\ldots$$

Meghatározandók $(\alpha,\ \beta)$ és ϱ.

Minthogy (2) keresztülmegy a $(0,\ 1)$ és $(1,\ 0)$ pontokon, ezek koordinátái kielégítik az egyenletet, azaz

(3) $$\alpha^2+(1-\beta)^2=\varrho^2\ldots$$

(4) $$(1-\alpha)^2+\beta^2=\varrho^2\ldots$$

(3)-ból és (4)-ből következik: $\alpha=\beta$, azaz a keresett kör középpontjának koordinátái egyenlők.[1] Továbbá: $\varrho^2=2\alpha^2-2\alpha+1\ldots$ (5)

Ha (1) és (2) körök merőlegesen metszik egymást, akkor a metszésponthoz húzott sugarak és a két kör centrálisa $(O_1O_2=c)$ derékszögű háromszöget alkotnak, melynek átfogója $O_1O_2=c$.

Tehát $r^2+\varrho^2=c^2$, ahol $c^2=\overline{O_1O_2^2}=(\alpha+1)^2+\alpha^2=2\alpha^2+2\alpha+1$.

Eszerint: $1+2\alpha^2-2\alpha+1=2\alpha^2+2\alpha+1$ és így $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{4}$, $\varrho^2=\frac{5}{8}$.

A keresett kör egyenlete: $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{5}{8}$.

Buday László (Premontrei rg. VIII. o. Szombathely).

[1] A keresett kör középpontja az $y=x$ egyenesen fekszik.

III. Megoldás. Az adott pontokat felfogatjuk, mint zérus sugarú köröket és ekkor feladatunkat úgy fogalmazhatjuk, hogy oly kört keresünk, mely három adott kört merőlegesen szel. Az ilyen kör középpontja, a három kör hatványpontja, azaz két kör hatványvonalának közös pontja.[2]

A $(0,\ 1)$ pontnak, mint körnek egyenlete:

$$x^2+(y-1)^2=0 \quad \text{azaz} \quad x^2+y^2-2y+1=0.$$

Ezen körnek és az

$$x^2+y^2+2x \qquad =0$$

körnek hatványvonala a

$$2x+2y-1=0\ldots \tag{a}$$

egyenlet által van megadva.[3]

Az $(1,\ 0)$ pontnak, mint körnek egyenlete:

$$(x-1)^2+y^2=0 \quad \text{vagyis} \quad x^2+y^2-2x+1=0.$$

Ennek és az

$$x^2+y^2+2x \qquad =0$$

körnek hatványvonalát

$$4x=1\ldots \tag{b}$$

egyenlet adja meg. Már most az (a) és (b) egyenletrendszer megoldása: $x=\frac{1}{4},\ \ y=\frac{1}{4}$, a három kör hatványpontját azaz a keresett kör középpontját határozza meg. A keresett kör ϱ sugara az $(1,\ 0)$ pont távolsága az $\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ ponttól, tehát

$$\varrho^2=\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{16}+\frac{1}{16}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}.$$

Bölcskei János (Kemény Zsigmond r. VIII. o. Bp. VI.).

[2] Két kör hatványvonala mértani helye azon körök középpontjainak, amelyek a két adott kört merőlegesen metszik.

[3] Két kör hatványvonalának egyenletét megkapjuk, ha a két kör egyenletének megfelelő tagjait kivonjuk egymásból, midőn a négyzetes tagok együtthatója 1.