I. Megoldás. Legyen

$$x+y-1=k, \quad \text{tehát} \quad x+y-2=k-1\ldots \tag{1}$$

és vizsgáljuk az adott a számnak a

$$\frac{k(k-1)}{2}\ldots \tag{2}$$

alakú egész számok sorához viszonyított helyzetét.[1]

Két eset lehetséges: a vagy előfordul ezen számok sorában, vagy a számsor két tagja között van.

Az első esetben a k poz. egész szám megállapítható úgy, hogy

$$a=\frac{(k+1)k}{2}, \quad \text{azaz} \quad x=\frac{(k+1)k}{2}-\frac{k(k-1)}{2}=k$$

és ekkor, mivel $x+y-1=k$, $x=k$ mellett $y=1$, tehát egyenletünket a $(k,\ 1)$ számpár kielégíti.

A második esetben k meghatározható úgy, hogy

$$\frac{k(k-1)}{2}<a<\frac{(k+1)k}{2},\ldots \tag{3}$$

és ekkor

$$0<x<k, \quad \text{t.i.} \quad x=a-\frac{k(k-1)}{2}=\alpha,$$

azaz létezik egy $x=\alpha$ poz. egész szám úgy, hogy $1\le\alpha<k$,

és így

$$y=k+1-\alpha>0,$$

egyenletünket tehát az $(a,\ \overline{k+1-\alpha})$ számpár elégíti ki.

A két eset egybefoglalásával mondhatjuk: $1\le\alpha\le k$.

Már most azt kell kimutatnunk, hogy egyenletünket több pozitív egész számokból álló számpár nem elégítheti ki. Nézzük tehát az a számnak a 2) sorozat azon tagjaihoz való helyzetét, melyek $\frac{k(k-1)}{2}$-t megelőzik![1] Így

$$a=\frac{k(k-1)}{2}+\alpha=\frac{(k-1)(k-2)}{2}+k-1+\alpha,$$

azaz most

$$x=k-1+\alpha>0;$$

azonban, mivel

$$x+y-1=k-1,$$
$$y=k-x=k-(k-1+\alpha)=1-\alpha\le 0,$$

tehát már nem kapunk *pozitív* y-t.

Általában, mivel

$$a=\frac{k(k-1)}{2}+\alpha=\frac{(k-i)(k-i-1)}{2}+\alpha+(k-1)+(k-2)+\ldots+(k-i)$$
$$\text{és} \quad i<k,$$

azért

$$x=\alpha+ik-\frac{i(i+1)}{2}>0.$$

Azonban most

$$x+y-1=k-i,$$

tehát

$$y=1+(k-i)-x=1+(k-i)-\alpha-ik+\frac{i(i+1)}{2},$$
$$y=1-\alpha-(i-1)\left(k-\frac{i}{2}\right)<0.$$

[1]E sorozat tagjai: $0,\ 1{,}1\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28\ \ldots$
másodrendű számtani haladványt alkotnak, az egymásután következő tagok különbségei $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$ elsőrendű számtani haladványt.

[1]Ha azokat tekintjük, amelyek $\frac{k(k-1)}{2}$ után következnek, akkor már $x<0$.

II. Megoldás. Ha be tudjuk bizonyítani, hogy a pozitív egész x, y számokból $(x,\ y)$ számpár összes lehető változatainak megfelelő rendezésével

$$f(x,y) \equiv x + \frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2}$$

kifejezés a pozitív számsor összes egész számait adja, 1-től kezdődőleg, egyszer és csak egyszer, akkor bebizonyítottuk, hogy mindig van egy és csakis egy pozitív egész (x,y) számokból álló $(x,y,)$ számpár, amely a követelménynek megfelel. Legyen ugyanis $x+y=c$, állandó, akkor $f(x,\ y)=a$ csak az x-től függ úgy, hogy amint x növekedik egy-egy egységgel, úgy növekedik a is egy-egy egységgel. Tehát az (x,y) számpár ama változataihoz, melyek az $x+y=c$ feltételnek megfelelnek, a pozitív egész számsor *egymásután következő tagjainak egy bizonyos része felel meg egyszer és csak egyszer.*[1]

Ha bebizonyítjuk, hogy az $(x,\ y)$ számpár változatainak következő csoportjához, amelyre nézve $x+y=c+1$, a pozitív egész számsornak az előbbieket közvetlenül követő csoportja felel meg, akkor beláthatjuk, hogy ha az $(x,\ y)$ számpár változatait így rendszerezve helyettesítjük $f(x,\ y)$ kifejezésbe, akkor valóban a pozitív egész számok teljes sorát kapjuk, egymásután, egyszer és csak egyszer, 1-től kezdődőleg. Ugyanis, ha $x=1$, $y=1$, akkor $a=1$.

Az $x+y=c$ csoport utolsó számpárja az $x=1,\ 2,\ \dots c-1$ sorrendben haladva $(\overline{c-1},\ 1)$. $x>c$ nem lehet, mert akkor $y\le 0$. A következő $x+y=c+1$ csoport első számpárja $(1,\ c)$.

A $(\overline{c-1},1)$ szmprral

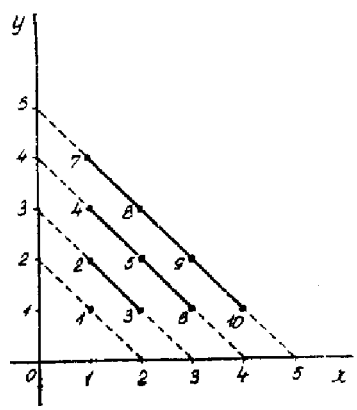
$$f(x,y)=c-1+\frac{(c-1)(c-2)}{2},\ \text{azaz}\ a_1=\frac{c^2-c}{2}.$$

Az $(1,\ c)$ számpárral

$$f(x,y)=1+\frac{c(c-1)}{2}\ \text{azaz}\ a_2=1+\frac{c^2-c}{2}$$

tehát

$$a_2=a_1+1.$$



Látjuk ebből, hogy az $x+y=c$ csoport utolsó számpárjának megfelelő egész szám a_1 és az utána következő egész szám, a_2, tényleg a következő csoport első $(x,\ y)$ számpárjához tartozó szám.

Ezzel tehát állításunkat bebizonyítottuk. Minthogy $x+y=c$ oly egyenesnek egyenlete, mely a tengelyekről c darabot vág le, ezen egyenesek mentén feküsznek az (x,y) számpárokhoz tartozó a egész számok. A kezdő szám $a=1$ az $x+y=2$ egyenesen fekszik. Az $x+y=c$ egyenesnek a tengelyeken fekvő pontjai már nem határoznak meg a számot.

Weisz Alfréd (Bolyai r. VII. o. Bp. V.)

[1] Ezen tagok száma: $c-1$, mert, ha $x+y=c$, akkor $x=1,\ 2,\ \dots c-1$