Legyen az adott ellipsis egyenlete

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \tag{1)}$$

Az egyenesé

$$x - m = 0 \tag{2)}$$

A kívánt kör egyenlete

$$(x-p)^2 + y^2 = \zeta^2 \tag{3)}$$

$M(x.y)$ az ellipsis kerületében egy pont, melyből a körhöz vont érintő hosszának négyzete

$$t^2 = (x-p)^2 + y^2 - \zeta^2$$

M pontnak az egyenestől mért távola

$$d^2 = (x-m)^2$$

Feltétel szerint

$$(x-p)^2 + y^2 - \zeta^2 = k(x-m)^2$$

hol k állandó szám.

Ez egyenlőségnek M bármely helyzete mellett állania kell, tehát érvényes akkor is, ha a főtengelyek végpontjaiban képzeljük, mely esetekre

$$(a-p)^2 - \zeta^2 = k(a-m)^2 \tag{4)}$$

$$(a+p)^2 - \zeta^2 = k(a+m)^2 \tag{5)}$$

$$p^2 + b^2 - \zeta^2 = km^2 \tag{6)}$$

E három egyenletből k számértéke p és ζ nagysága meghatározható s a következő értékek erednek

$$k = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = E^2$$

az excentricitas szám-értéke

$$p = \frac{c^2}{a^2}m$$

$$\zeta^2 = b^2(1 - \frac{c^2m^2}{a^2}\Big)$$

vagy ha p elébbi értékét helyettezzük

$$\zeta^2 = b^2(1 - \frac{p^2}{c^2}\Big)$$

Minthogy k értéke valódi tört, a kör középpontja mindig az egyenes és az ellipsis középpontja közé esik s az m távolságot

$$-\frac{p}{m-p} = -\frac{k}{1-k} = -\frac{b^2}{c^2} \qquad \text{arányban osztja.}$$

Tehát a kör középpontja egyszerűen szerkeszthető, ha a gyűjtőpontot a kis féltengely végpontjával összekötvén az átfogóra m-et felrakjuk s a származott háromszöghöz hasonlót szerkesztünk. E derékszögű háromszög csúcsából az átfogóra merőlegest bocsátván a gyűjtőpontnak e merőleges talppontjától mért távola

$$p = m\ \cos^2\varphi, \quad \text{hol} \quad \cos\varphi = \frac{c}{a}.$$

ζ^2 értékéből kiolvasható, hogy csak addig valós, míg $(p) \leq (c)$ a mi a középpontnak a gyűjtőpont és az ellipsis középpontja között fekvését követeli.

$$\zeta_{max} = b, \quad \text{ha} \quad p = 0, \qquad \zeta_{min} = 0, \quad \text{ha} \quad p = c.$$

Ez esetben a megfelelő egyenes a directrix. Az ellipsis és a kör kölcsönös fekvését vizsgálván a

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{és}$$

$$a^2(x - \frac{c^2}{a^2}m)^2 + a^2y^2 = b^2\frac{a^2 - c^2m^2}{a^2}$$

egyenletekből y eliminatioja után:

$$(x-m)^2 = 0$$

ered, ami azt mondja, hogy a kör az ellipsist

$$x = m, \quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - m^2}$$

pontokban mindig érinti, tehát mindig egész terjedelmében az ellipszisen belől fekszik. Egyszersmind az is kitűnik ebből, hogy úgy a kör, mint az ellipszis a feladat lehető volta esetében az egyenest érintkezéspontjukban vágják. Az érintéspont azonban csak addig valós, míg $m \leq a$, azontúl képzetes. Ha H egyenes a kis tengelyre merőleges, egyenlete:

$$y - n = 0$$

A kör egyenlete:

$$x^2 + (y - q)^2 = \zeta_1^2 \quad \text{és} \quad M(x, y)$$

az ellipszis tetszésszerint vett pontja:

$$t_1^2 = x^2 + (y - q)^2 - \zeta_1^2$$

$$d_1^2 = (y - n)^2$$

Feltétel szerint

$$x^2 + (y - q)^2 - \zeta_1^2 = k_1(y - n)^2$$

Ezen egyenlet helyes marad x és y bármely értékénél, melyek az ellipsis egyenletét kielégítik, tehát ha M a főtengelyek végpontjaiban van is, midőn:

$$(b - q)^2 - \zeta_1^2 = k_1(b - n)^2 \tag{4a}$$

$$(b + q)^2 - \zeta_1^2 = k_1(b + n)^2 \tag{5a}$$

$$a^2 + q^2 - \zeta_1^2 = k_1 n^2 \tag{6a}$$

mely egyenletekből:

$$k_1 = -\frac{c^2}{b^2}$$

$$q = -\frac{c^2}{b^2}n$$

$$\zeta_1^2 = a^2\frac{b^4 + c^2n^2}{b^4} = a^2(1 + \frac{q^2}{c^2}\Big)$$

q értékéből következik, hogy ez esetben a kör középpontja mindig kívül esik, az egyenes és az ellipsis középpontja meghatározták közön s pedig az ellipszis középpontjától ellenkező oldalon, mint az egyenes. E pont az n távolságot

$$\frac{q}{q + n} = \frac{c^2}{a^2}$$

arányban osztja.

ζ_1 értéke mutatja, hogy a kör mindig lehetséges és a sugár n értékével nagyobbodik.

$$\zeta_{1min} = a, \quad \text{ha} \quad q = n = 0.$$

Természetes, hogy ez esetben maximumról nem lehet szó. Az ellipszis és kör kölcsönös fekvését vizsgálván, a

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{és}$$

$$b^2x^2 + b^2y + \frac{c^2}{b^2}n^2 = a^2\frac{b^4 + c^2n^2}{b^2}$$

egyenletekből x eliminácziója után:

$$(y - n)^2 = 0$$

ered, ami azt mondja, hogy a kör az ellipsist mindig érinti

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - n^2}, \quad y = n$$

pontokban. Az érintés valóban csak addig lehetséges, míg x elébbi értéke valós, tehát $b \geq n$, azaz: míg az egyenes az ellipszist érinti vagy metszi. Ha azonban ez nem történik a kör az ellipszist nem érinti s az egyenest nem metszi. Ez esetben a körnek egy pontja sincs az ellipsisen belül, hanem az utóbbi egész terjedelmében a körön belül fekszik.

(Folytatjuk).

Szerkesztő: **ARANY DÁNIEL**

Nyomatott Gross Testvéreknél Győrött.

34. Folytatás.

II.

Legyen a két egyenes:

$$H = x - m = 0, \quad H_1 = y - n = 0$$

s a megfelelő körök

$$(x - \frac{c^2}{a^2}m)^2 + y^2 = b^2\frac{a^4 - c^2m^2}{a^4}, \quad x^2 + (y + \frac{c^2}{b^2}n)^2 = a^2\frac{b^4 + c^2n^2}{b^4}$$

A centralis egyenlete:

$$\frac{a^2x}{c^2m} - \frac{b^2y}{c^2n} = 1$$

egyszerűen a középpontok coordinátái alapján képezve. Ez egyenlet könnyen hozható következő alakra:

$$(x - m) - \frac{b^2m}{a^2n}(y - n) = 0$$

ha

$$c^2 = a^2 - b^2$$

helyettezést teszünk. De az utóbbi alak világosan mutatja, hogy a centralis mindig átmegy az

$$x - m = 0 \qquad \text{és} \qquad y - n = 0$$

egyenesek metszéspontján.

Az eddigiek alapján egyszerűen, minden számítás nélkül következik, hogy ha az elébbi körök érintkeznek, ez érintkezés csak az ellipszis kerületében történhetik, tehát a körök egyidejűleg az ellipszist is érintik, mivel pedig a megfelelő egyenesek mindig a kör és ellipszis érintkezéspontján mennek át, ezek metszése szintén az ellipszis kerületében történik mindig, azaz P pont geometriai helye maga az ellipszis.

Ha a körök közös szelője átmegy P ponton, akkor az elébbi meggondolásokból következik, hogy e közös szelő mindig érintője az ellipszisnek is a P pontban, tehát a geometriai hely ismét az elébbi: maga az ellipszis.

Ez állításokat analytikailag is igazolhatjuk.

A két kör érintkezésének föltétele:

$$c^2\sqrt{b^4m^2 + a^4n^2} = b^3\sqrt{a^4 - c^2m^2} - a^3\sqrt{b^4 + c^2n^2},$$

mert a kisebb kör a nagyobban fekszik, tehát csak belől érintheti a nagyobbat. A kifejezést rationalissá téve:

$$b^2m^2 + a^2n^2 = a^2b^2$$

ered, ami m és n változókban az adott ellipszis egyenlete.

A két kör közös szelőjének egyenlete:

$$2b^2mx + 2a^2ny = b^2m^2 + a^2n^2 + a^2b^2$$

s így ha ez átmegy $P(m, n)$ ponton:

$$b^2m^2 + a^2n^2 = a^2b^2$$

következik, ami szintén az ellipszis egyenlete m, n változókban.

III.

Legyen

$$H = x - m = 0, \qquad H_1 = x - m_1 = 0$$

két a nagy tengelyre merőleges egyenes egyenlete. A megfelelő körök:

$$(x - \frac{c^2}{a^2}m)^2 + y^2 = b^2\frac{a^4 - c^2m^2}{a^4}$$

és

$$(x - \frac{c^2}{a^2}m_1)^2 + y^2 = b^2\frac{a^4 - c^2m_1^2}{a^4}$$

egyenletekben advák. Feltétel szerint:

$$t^2 = \frac{c^2}{a^2}(x - m)^2$$

$$t_1^2 = \frac{c^2}{a^2}(x - m_1)^2$$

azaz:

$$t = \pm\frac{c}{a}(x - m), \quad t_1 = \pm\frac{c}{a}(x - m_1)$$

Ha M pont az egyenesek közé esik, akkor pl.

$$m_1 < x < m$$

vagy fordítva. De ez esetben

$$x - m_1 \qquad \text{és} \qquad x - m$$

különböző előjelűek úgy, hogy:

$$t = -\frac{c}{a}(x - m), \qquad t_1 = \frac{c}{a}(x - m_1)$$

veendő, hogy a t és t_1 távolságok pozitív értékek legyenek.

E két egyenletből pedig.

$$t + t_1 = \frac{c}{a}(m - m_1)$$

állandó.

Ha M pontot az egyenesek meghatározták távon kívül esik:

$$x \gtrless m \qquad \text{és} \qquad x \gtrless m_1$$

áll. Úgyde az esetben

$$x - m \qquad \text{és} \qquad x - m_1$$

mindig egyenlő jelűek és így pl.:

$$t = \frac{c}{a}(x - m), \quad t_1 = \frac{c}{a}(x - m_1),$$

honnan:

$$t - t_1 = \frac{c}{a}(m_1 - m)$$

állandó.

Ha az egyenesek a kis tengelyre merőlegesek, tehát:

$$H = y - n = 0 \qquad H_1 = y - n_1 = 0$$

egyenletekben adván és a megfelelő körök egyenletei:

$$x^2 + (y + \frac{c^2}{b^2}n)^2 = a^2\frac{b^4 + c^2n^2}{b^4}$$

és

$$x^2 + (y + \frac{c^2}{b^2}n_1)^2 = a^2\frac{b^4 + c^2n_1^2}{b^4}$$

Feltétel szerint:

$$t^2 = -\frac{c^2}{b^2}(y - n)^2$$

$$t_1^2 = \frac{c^2}{b^2}(y - n_1)^2$$

honnan az érintők képzetesek, a mi természetes, mert, mint kimutattuk ez esetben az ellipszis minden M pontja a körökön belől fekszik. Ha azonban $\frac{c^2}{b^2}$-et absolut értékében vesszük, akkor t és t_1 a köröknek M ponton átmenő átmérőjére e pontban emelt merőleges hurok felét jelentik, vagyis a tétel ez esetben így fogalmazható: Ha H és H_1 a kis tengelyre merőleges egyenesek s h és h' a megfelelő körök, akkor az ellipszis egy tetszésszerinti pontján átmenő átmérőkre ez M pontban emelt merőleges hurok összege vagy különbsége állandó, a szerint, amint az M pont által leírt ellipsis ív az egyenesek közé esik vagy sem. Ha tehát ez esetre d és d_1 az illető félhúrokat jelentik, melyek értékei:

$$d^2 = \zeta^2 - x^2 - (y - q)^2$$

$$d_1^2 = \zeta_1^2 - x^2 - (y - q_1)^2$$

egyenlőségekből következnek, a feltételek így alakulnak:

$$d = \pm\frac{c}{b}(y - n), \qquad d_1 = \pm\frac{c}{b}(y - n_1)$$

Ha most M pont az egyenesek közé esik, az az:

$$n_1 < y < n$$

az $y - n_1$ és $y - n$ különbségek ellenkező előjelűek s így d és d_1 positív voltára:

$$d = -\frac{c}{b}(y - n), \qquad d_1 = \frac{c}{b}(y - n_1)$$

értékek veendők honnan:

$$d + d_1 = \frac{c}{b}(n - n_1)$$

állandó, míg ha M az egyeneseken kívül esik, tehát pl:

$$y > n_1, \qquad y > n$$

egyenlőtlenségek állanak:

$$d = \frac{c}{b}(y - n), \qquad d_1 = \frac{c}{b}(y - n_1)$$

veendők, honnan:

$$d - d_1 = \frac{c}{b}(n_1 - n)$$

állandó, s így az értékek kétszerese is, a mi az állítás helyes voltát igazolja. A feladat a hyperbola esetében teljesen egyező eredményeket ad, azonban az utolsó tétel módosított alakja nélkül. Az eredmények egyszerűen felírhatók, ha az előbbiekben b^2 helyett $-b^2$-őt teszünk, vagy ami mindegy: b-t $i \cdot b$-vel cseréljük fel s az eredményeket megfelelő módon értelmezzük. Itt a megfelelő körök sugarainak csak alsóhatára van.