Jegyzet a 30. feladat megoldásához.

I.

Hogy az

$$a^2u^4 - au - 1 = 0$$

egyenletnek csak 2 valós, még pedig egy positív és egy negatív gyöke van, azt a Descartes-féle jelszabály segítségével ismerhetjük fel. E szabály következőképpen hangzik:

Valamely egyenletben a positív gyökök száma sohasem nagyobb az ezen egyenletben foglalt jelváltozások számánál.

Valamely egyenletben a negatív gyökök száma sohasem nagyobb, mint a megfelelő negatív*) egyenletben foglalt jelváltozások száma.

Minthogy a jelek sorozata az

$$a^2u^4 - au - 1 = 0$$

egyenletben

$$+ \qquad - \qquad -$$

a jelváltozások száma 1, s így legfeljebb 1 positív gyök létezik. A negatív egyenletben a jelek sorozata a következő:

$$+ \qquad + \qquad -$$

így a jelváltozások száma ismét 1. Minthogy végre az

$$a^2u^4 - au - 1 = 0$$

egyenlet első és utolsó tagja *ellenkező* előjelű, az egyenletnek legalább *egy* valós gyöke van; minthogy másrészt az egyenlet fokszáma páros, az egy valós gyök mellett *még egy* valós gyöknek kell előfordulni. Ezen eredmény összevetéséből a Descartes-féle jelszabály eredményeivel, következik, hogy az egyenletnek 2 és *csak* 2 valós gyöke van, még pedig egy positív és egy negatív. A Descartes-féle jelszabály levezetése megtalálható: König Gyula " Analízis" első kötete, második részének 132. és 133. pontjaiban.

*) A $g(x) = 0$ egyenletnek megfelelő negatív egyenlet a $(g - x) = 0$.

II.

Hogy az

$$u^9 + (u+1)^4 = 0$$

egyenletnek csak egy valós gyöke van, mely 0 és 1 között fekszik, az *Sturm-tételével* mutatható ki.

Hogy ezt megfogalmazhassuk, a következőket kell előrebocsátanunk:

Legyen adva az $f(x) = 0$ egyenlet s képezzük az $f'(x) = 0$ egyenletet, melyben $f'(x)$ az $f(x)$-ből a következőképpen származtatandó:

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Osszuk el már most az $f(x)$-et, vagy annak valamely tetszésszerinti *állandó* A_1 számmal szorzott alakját $f(x)$-szel s legyen az osztás hányadosa $q_1(x)$, a maradék $-R_1(x)$. Ekkor

$$A_1 f(x) = f'(x) q_1(x) - R_1(x)$$

képezzük továbbá a következő analog alakú egyenleteket:

$$A_1 f'(x) = R_1(x) q_2(x) - R_2(x)$$

$$A_k R_{k-2}(x) = R_{k-1}(x) q_k(x) - R_k(x)$$

$$A_l = R_{l-2}(x) = R_{1-l}(x) q_l(x) - R_l,$$

hol $A_1 \ldots A_l$ positív számok és R_l végre az x-től független számérték.

A *Sturn-féle függvények* sorozata a következő:

$$f(x), \quad f'(x), \quad R_1(x), \quad \ldots, \quad R_{k-1}(x), \quad R_k(x) \quad R_{k+1}(x), \quad \ldots, \quad R_1.$$

Ezek után Sturm-tétele a következőképpen hangzik:

Legyen a és b két valós szám, és $a < b$; e számok helyettesítése a Sturm-féle függvények sorozatába két számsort ad, melyben a jelváltozások száma legyen V_a, illetőleg V_b. Ekkor $V_a - V_b$ positív egész szám vagy 0, és *pontosan* az $f(x) = 0$ egyenlet azon α_i gyökeinek száma, melyekre nézve $a < \alpha_i \leqq b.**)$

Minthogy az

$$f(u) = u^9 + (1+u)^4 = 0$$

egyenletben

$$f(-1) = -1, \quad f(0) = +1;$$

továbbá minden más $k < -1$ negatív számra nézve $f = (k) < 0$, s minden $l > 0$ számra nézve $f(l) > 0$, az egyenletnek csak a (-1)-től 0-ig terjedő számtartományban lehetnek valós gyökei, e tartomány határainak, az $a = -1$ és $b = 0$ számoknak, az egyenlet Sturm-féle függvényei sorozatába való helyettesítése után oly két számsorozatot kapunk, melyekben a jelváltozások számaira,

$$V_{-1} - V_0 = 1.$$

Így tehát az

$$u^9 + (u+1)^4 = 0$$

egyenletnek *egy* és *csak egy* valós gyöke van, s ez a (-1) és 0 határok közé esik.

**)Lásd ugyancsak König "Analizis" czimű művében a második rész 134. és 135. pontjait.