Annak kifejezésére, hogy az (a) görbe-vonal az $M(\alpha,\ \beta)$ ponton megy keresztül, a következő egyenletet nyerjük:

$$a^2\alpha\beta + a\beta + \alpha = 0 \tag{1}$$

mely a-nak két értékét a'-et és a''-t szolgáltatja. Fejezzük ki azon körülményt; hogy az (a') és (a'') hyperbolák érintői az M pontban egymásra merőlegesek, egyenlet alakjában. E hyperbolák érintői a következő egyenletek által advák:

$$(a'^2\beta + 1)(x - \alpha) + (a'^2\alpha + a')(y - \beta) = 0$$

$$(a''^2\beta + 1)(x - \alpha) + (a''^2\alpha + a'')(y - \beta) = 0$$

tehát a merőlegesség feltétele

$$(a'^2\beta + 1)(a''^2\beta + 1) + (a'^2\alpha + a')(a''^2\alpha + a'') = 0$$

vagy kifejtve

$$(a'^2a''^2(\alpha^2 + \beta^2) + (a'^2 + a''^2)\beta + a'a''(a' + a'')\alpha + a'a'' + 1 = 0 \tag{2}$$

Az 1) alatti egyenletből következik, hogy:

$$a'a'' = \frac{1}{\beta} \qquad a' + a'' = -\frac{1}{\alpha}$$

miből

$$a'^2 + a''^2 = (a' + a'')^2 - 2a'a'' = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\beta}$$

Ezen értékeket a 2)-be helyettesítve, ez a következő alakot veszi fel:

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} - 1 = 0;$$

vagy a nevezők eltávolítása után

$$\alpha^4 + \beta^3 = 0$$

A (C) tehát *negyedrendű, parabolikus* görbe-vonal. Hogy az

$$x^4 + y^3 = 0$$

$$a^2xy + ay + x = 0$$

görbe vonalak valós és véges távolságban fekvő metszéspontjainak számáról tájékozódhassunk, keressük azon egyenes vonalak számát, melyek a koordináta-rendszer kezdőpontján és a két görbe-vonal egy-egy metszéspontján mennek keresztül. Egy ilyen egyenes egyenlete:

$$y = ux$$

Ezen egyenletből és a két megelőzőből kiküszöböljük az x-et és y-t. A hány valós gyöke lesz a származó egyenletnek, melyben u az ismeretlen, annyi lesz a keresett pontok száma. A kiküszöbölés után nyert egyenlet a következő:

$$a^2u^4 - au - 1 = 0$$

Ezen egyenletnek csak 2 valós, még pedig egy positív és egy negatív gyöke van.*) Ha α és β a coordinátái az

$$a^2xy + ay + x = 0$$

$$b^2xy + by + x = 0$$

egyenletek által értelmezett hyperbolák egy közös pontjának, annak feltételét, hogy e görbevonalak merőlegesek egymással az $M(\alpha,\ \beta)$ pontban, a következő egyenlet fejezi ki.

$$(a^2\beta + 1)(b^2\beta + 1) + (a^2\alpha + a)(b^2\alpha + b) = 0$$

s ha ebben α és β helyébe az

$$a^2\alpha\beta + a\beta + \alpha = 0$$

$$b^2\alpha\beta + b\beta + \alpha = 0$$

egyenletekből nyert értékeket helyettesítjük, az a és b között relációt nyerünk, mely a (C') görbe vonalat értelmezi. Kiküszöbölve a megelőző egyenletekből $\alpha\beta$-át, a következő egyenlete nyerjük:

$$ab\beta + (a + b)\alpha = 0$$

melyből és a következőből:

$$a^2\alpha\beta + a\beta + \alpha = 0$$

$$\beta = \frac{1}{ab}$$

$$\alpha = -\frac{1}{a+b}$$

A (C') egyenlete tehát

$$(a^2\frac{1}{ab} + 1)(b^2\frac{1}{ab} + 1) + ab\left(1 - \frac{a}{a+b}\right)\left(1 - \frac{b}{a+b}\right) = 0$$

vagy a nevezők eltávolítása után

$$(a+b)^4 + a^3b^3 = 0$$

Ha a-t és b-t egy pont koordinátáinak tekintjük, e relháczió egy görbevonalat értelmez, melynek egyenlete

$$(x+y)^4 + x^3y^3 = 0 \qquad (C')$$

A (C') görbevonal keresztül megy a koordináta rendszer kezdőpontján. Keressük érintőjét e pontban.

Az érintő alakja a következő lesz:

$$y - ux = 0$$

kérdezzük, hogy az u mely értékeinél lesz ez egyenesnek és a (C') görbevonalnak legalább két egybeeső pontja? Kiküszöbölve y-t a két egyenletből, a következőt nyerjük:

$$x^2 = -\frac{(1+u)^4}{u^3}$$

s ez egyenlet két gyöke akkor egyenlő, ha $u = -1$; a keresett érintő egyenlete tehát

$$x + y = 0$$

vagyis oly egyenes, mely a positív x tengellyel $135°$-nyi szöget képez.

Látható továbbá a (C') alatti egyenletből, hogy a görbevonalnak valós pontjai csak ott vannak, hol a pontok koordinátái különböző előjelűek; vagy az

$$y = ux$$

$$x^2 = -\frac{(1+u)^4}{u^3}$$

egyenletekből, ha $u < 0$.

A görbevonal czentrikusan-szimmetrikus a koordinátarendszer kezdőpontjára nézve; elegendő x^2 változásait tanulmányozni, ha u változik; u változhatik $-\infty$-tól 0-ig.

Vizsgáljuk tehát a

$$z = -\frac{(1+u)^4}{u^3}$$

függvény változásait. A függvény *derivátája*, vagyis a

$$\lim_{u_1=u} \frac{z_1 - z}{u_1 - u} = z' = \frac{(1+u)^3}{u^4}(3-u)$$

kifejezés előjele mindig megegyezik az $(1+u)$ előjelével; az $x^2=z$ változásait tehát a következő táblázat tünteti fel:

u	$-\infty$	$-$	-1	$-$	0
z'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
x^2	$+\infty$	fogy	0	növekedik	$+\infty$

Keressük már most a (C) és a (C') metszéspontjait. Küszöböljük ki ismét az

$$\begin{aligned} x^3y^3+(x+y)^4&=0\\ x^4+y^3&=0\\ y-ux&=0 \end{aligned}$$

egyenletekből az x-et és az y-t. Az eredmény a következő:

$$u^9+(1+u)^4=0$$

Ugyancsak a következő czikk**) fejtegetéséből következik, hogy a fenntebbi egyenletnek csak egy valós gyöke van, mely 1 és -1 között fekszik. A két görbevonal tehát csak *egy* véges és a kezdőponttól különböző pontban metszi egymást.

*) Lásd a következő czikket.

**) Jelen számból térszűke miatt kimaradt. A jövő kettős számban fogjuk közölni.

Szerk.