O kör egyenlete:

$$x^2+y^2=r^2 \tag{1}$$

$A(c,\ o),\quad M(\xi,\ \eta),\quad N(\xi,\ -\eta)$

M és N, O kör kerületében lévén:

$$\xi^2+\eta^2=r^2 \tag{1.a}$$

AON kör egyenlete:

$$x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y=0, \tag{2}$$

mert átmegy O ponton. De átmegy A ponton is, tehát:

$$2\alpha=-c$$

1. és 2. kör közös hatványvonala:

$$cx-2\beta y-r^2=0, \tag{3}$$

mely AO átmérőt állandó $A'\left(\frac{r^2}{c},\ 0\right)$ pontban vágja. Ha AO átmérő végpontjai G és H, akkor $(GAHA')=-1$, mert:

$$AG=(r-c),\quad HA=(r+c),\quad A'G=\frac{r(r-c)}{c},\quad A'H=\frac{r(r+c)}{c}.$$

tehát:

$$(AG:AH)\ :\ (A'G:A'H)=-1,$$

azaz: A' harmonikus párja A-nak, s vele együtt ismert módon változtatja helyzetét.

A körök közös hatványvonala mindig átmegy N ponton is, s így:

$$c\xi+2\beta\eta-r^2=0 \tag{3.a}$$

OM átmérő egyenlete:

$$\eta x-\xi y=0 \tag{4}$$

3) és 4)-ből:

$$\xi=\frac{r^2x}{cx+2\beta y},\quad \eta=\frac{r^2y}{cx+2\beta y}.$$

ξ és η talált értékeit 1.a)-ba helyettezve, s tekintetbe véve, hogy 2)-ből:

$$2\beta y=-(x^2+y^2-cx),$$

tehát

$$cx+2\beta y=-(x^2+y^2-2cx),$$

a keresett geometriai hely egyenlete:

$$(x^2+y^2-2cx)^2-r^2(x^2+y^2)=0 \tag{5}$$

A geometriai hely negyedrendű görbesor, melynek egyedei A pont helyzetétől (c értéke) függőleg alakulnak.

A görbe általános elemzése.

Az 5) egyenletből kiolvasható, hogy a görbének O pont mindig pontja, még pedig vagy csomópontja, vagy izolált kettős pontja, vagy csúcsa, mert c bármely értéke mellett is

$$y^2=0$$

helyettezésre:

$$x^2[(x-2c)^2-r^2]=0,$$

tehát $x^2=0$ ered mindíg. Az OA átmérővel alkotott másik két metszéspont abscissái:

$$(x-2c)^2-r^2=0\text{-ból}$$

$$x=2c+r,\quad x=2c-r.$$

Az OA-ra függélyes átmérő végpontjai szintén mindig pontjai a görbének, mert $x=0$ mellett

$$y^2(y^2-r^2)=0,$$

tehát az utolsó tényezőből

$$y=\pm r$$

ered.

A görbe mindig zárt, AO átmérőre symmetrikus és A pont helyzetéhez képest:

$$r > 2c > 0$$

mellett O izolált kettős pont.

Minél inkább közeledik $< A >$ O-hoz, annál inkább megközelíti a görbe a kört, s $c = 0$ mellett vele egybeesik.

$r = 2c$ esetében O pont a görbe csúcsa, s AO átmérő érintő O pontban.

$2c > r$ mellett a görbe hurkot vet, s O csomóponttá válik. Ha $c = r$, tehát A pont AO átmérő végpontja A szintén pontja a görbének. $< A >$ távoztával a hurokrész mind nagyobb lesz, s ha A a végtelenbe megy: a görbe, mint az AO-ra merőleges átmérő, kettős egyenessé fajul.

A csomóponthoz tartozó két érintő meghatározására legyen annak egyenlete:

$$y = mx.$$

mely egyenesnek e szerint 3 pontja közös O-ban a görbével, ha érintő:

Ezt a görbe egyenletébe téve:

$$x^2[((1+m^2)x - 2c)^2 - r^2(1+m^2)] = 0,$$

mely egyenletet $x = 0$-nak háromszor kellvén kielégítenie, az m meghatározására

$$r^2(1+m^2) = 4c^2$$

ered, azaz

$$m = \pm\frac{\sqrt{4c^2 - r^2}}{r}$$

mindig, mely egyenlet szintén mutatja: mikor lesz O a görbe ilyen vagy olyan singularis pontja.

Minden más pontban az érintő hajlásszögének tangense ismert módon képezve:

$$\tan\alpha = \frac{2(x^2+y^2-2cx)(x-c) - r^2x}{y(r^2 - 2(x^2+y^2-2cx))}$$

vagy M pont coordinátái függvényében:

$$\tan\alpha = \frac{2cr^2 + r^2\xi - 4c\xi^2}{\eta(4c\xi - r^2)}.$$

II.

A feladat második részében kívánt geometriai hely meghatározására először is fejezzük ki $P(x,\, y)$ coordinátáit M-éi (τ, μ) függvényében, kiindulván a

$$\tau = -\frac{r^2x}{(x^2+y^2-2cx)}, \quad \mu = -\frac{r^2y}{(x^2+y^2-2cx)}$$

összefüggésekből és OM átmérő

$$\mu x - \tau y = 0$$

egyenletéből.

Tekintve, hogy

$$\tau^2 + \mu^2 = r^2$$

mindig

$$x = \frac{2c\tau - r^2}{r^2}\tau, \quad y = \frac{2c\tau - r^2}{r^2}\mu$$

P pontban az érintő hajlásszöge tangensének már ismert értéke folytán az érintő kör sugarának egyenlete

$$y - \frac{2c\tau - r^2}{r^2}\mu = \frac{\mu(r^2 - 4c\tau)}{2cr^2 + r^2\tau - 4c\tau^2}\left(x - \frac{2c\tau - r^2}{r^2}\tau\right) \tag{6)}$$

OM átmérőre OP távolság felező pontján átmenő merőleges egyenlete:

$$y - \frac{2c\tau - r^2}{2r^2}\mu = -\frac{\tau}{\mu}\left(x - \frac{2c\tau - r^2}{2r^2}\tau\right) \tag{7)}$$

6) és 7)-ből az érintő kör középpontjának coordinátái:

$$p = \frac{2c - \tau}{2}, \quad q = -\frac{\mu}{2}$$

Ezek alapján a P pontban érintő és O-n átmenő kör (nem a görbületi, vagy simuló) egyenlete:

$$x^2 + y^2 - (2c - \tau)x + \mu y = 0 \qquad 8)$$

Az $\overline{OM}$ átmérőjű kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 - \tau x - \mu y = 0 \qquad 9)$$

A két egyenlet összeadásával τ és μ határozatlanok kiküszöböltetvén, a keresett geometriai hely egyenlete:

$$x^2 + y^2 - cx = 0 \qquad 10)$$

a mi $\overline{AC}$ átmérő fölött írt kör.

Maksay Zsigmond.