A későbbi átalakítások egyszerűbb volta miatt legyen a három szám

$$n^2, \quad (n+2x)^2, \quad (n+2y)^2$$

Feltétel szerint:

$$2(n+2x)^2 = (n+2y)^2 + n^2$$

azaz:

$$(n+2x)^2 = (n+y)^2 + y^2$$

honnan:

$$(n+2x) = \sqrt{[(n+y)^2 + y^2]}$$

$(n+2x)$ rationális egész szám, ha:

$$[(n+y)^2 + y^2]$$

teljes négyzet, vagyis, ha $(n+y)$ és y úgynevezett pythagorasi számok. Legyen:

$$(n+y) = 2pq \tag{1)}$$

és

$$y = p^2 - q^2, \tag{2)}$$

mert ekkor valóban:

$$(n+2x) = (p^2 + q^2) \tag{3)}$$

Ha a sor növekedő, a mit föltehetünk, akkor x és y positiv egész számok s 2)-ből következik, hogy

$$|p| > |q|$$

és 1)-ből:

$$|q| > 0.$$

azaz: p legalább 2 és q legalább is 1.

1) és 2) alapján a keresett számok periodusa:

$$(q^2 + 2pq - p^2)^2, \quad (p^2 + q^2)^2, \quad (p^2 + 2pq - q^2)^2$$

A sor állandó különbsége $4pq(p^2 - q^2)$. E különbség mindig páros, a miből következik, hogy a tagok egyidejűleg párosak vagy páratlanok. E körülmény pedig p és q-tól függ. A sor tagjai párosak: ha p és q egyidejűleg párosak, vagy páratlanok. A sor tagjai páratlanok, ha p és q közül egyik páros, a másik páratlan. Az általános alak szerint a periódus második tagjának alapszáma mindig két teljes négyzet összege, s ez alapon megkapjuk a feleletet a kérdés második részére: melyik három négyzet a legkisebb, mely arithmetikai sort alkot? A számok sorában 5 a legkisebb szám, mely két teljes négyzet összege $(2^2 + 1^2)$ s így $p = 2$, $q = 1$ helyettezés vezet a kívánt számokhoz, azaz:

$$\begin{array}{ccc} 1^2 & 5^2 & 7^2 \\ 1 & 25 & 49 \end{array}$$

Természetes, hogy a legkisebb intervallumú periodusokat akkor találjuk, ha páratlan számok esetében

$$p - q = 1 \qquad \text{és}$$

páros számok estében $p - q = 2$.

Az általános alakok vizsgálata azt mutatja továbbá, hogy egy bizonyos periodust $p = 4$ és $q = n - 1$ helyettesítéssel megállapítván, ha a következő periodusban $p = n + 1$ és $q = n$ helyettezést végezzük: az új periodus első tagja egyenlő a régi utolsó tagjával. Ugyanis $p = n$ és $q = n - 1$-re , tehát páratlan számok esetére:

$$(2n^2 - 4n + 1)^2, \quad (2n^2 - 2n + 1)^2, \quad (2n^2 - 1)^2$$

képezik a sort, míg

$$p = n + 1 \quad \text{és} \quad q = n$$

helyettezésre:

$$(2n^2 - 1)^2, \quad (2n^2 + 2n + 1)^2, \quad (2n^2 + 4n + 1)^2$$

lesznek a sor tagjai.

Páros számsor esetében pedig:

$$p = m, \quad q = m - 2$$

a) helyettezésre:

$$(2m^2-8m+4)^2, \quad (2m^2-4m+4)^2, \quad (2m^2-4)^2$$

és

$$p=m+2, \quad q=m$$

helyettezésre:

$$(2m^2-4)^2, \quad (2m^2+4m+4)^2, \quad (2m^2+8m+4)^2$$

lesznek a periódus tagjai

b)

$$p=m+1, \quad q=m-1$$

esetben

$$(2m^2-4m-2)^2, \quad (2m^2+2)^2, \quad (2m^2+4m-2)^2$$

míg

$$p=m+3, \quad q=m+1$$

esetben

$$(2m^2+4m-2)^2, \quad (2m^2+8m+10)^2, \quad (2m^2+12m+14)^2$$

adják a periódusokat.

Maksay Zsigmond.