A 2) alatti egyenlet a következő alakban írható:

$$\frac{\tan^2 x}{1+tan^2x}+\frac{\tan^2 y}{1+tan^2y}=b^2,$$

vagy kifejtve ezt és tekintetbe véve az 1)-et,

$$\tan^2 x+a^2+\tan^2 y+a^2=b^2(1+\tan^2 x+\tan^2 y+a^2),$$

melyből következik, hogy

$$\tan^2 x+\tan^2 y=\frac{2a^2-b^2(1+a^2)}{b^2-1}. \qquad 3)$$

Az 1) és 3) egyenletek alapján $\tan^2 x$ és $\tan^2 y$ a következő másodfokú egyenlet gyökei:

$$X^2-\frac{2a^2-b^2(1+a^2)}{b^2-1}X+a^2=0.$$

Hogy ezen egyenlet $\tan^2 x$ és $\tan^2 y$ részére elfogadható értékeket szolgáltasson, *szükséges és elegendő,* miszerint gyökei valósak és pozitivok legyenek.

A valósság feltétele:

$$\left[\frac{2a^2-b^2(1+a^2)}{b^2-1}\right]-4a^2\geqq 0,$$

$$[2a(a+1)-b^2(a+1)^2][2a(a-1)-b^2(a-1)^2]\geqq 0;$$

ha ezen egyenletet elosztjuk az

$$(a+1)^2(a-1)^2$$

pozitív értékkel, lesz belőle:

$$\left(\frac{2a}{a+1}-b^2\right)\left(\frac{2a}{a-1}-b^2\right)\geqq 0. \qquad 4)$$

Minthogy a gyökök szorzata a^2 positív, ez utóbbiak akkor lesznek positívok, ha összegük

$$\frac{2a^2-b^2(1+a)}{b^2-1}>0$$

vagyis b^2 minden értékénél, mely a

$$\frac{2a^2}{a^2+1} \quad \text{és} \quad 1$$

határok közé esik.

Ha a 4) alatti egyenlőtlenség baloldalán álló mennyiségben b^2 helyébe $\frac{2a^2}{a^2+1}$-et teszek, az negatív lesz és így $\frac{2a^2}{a^2+1}$

$$\frac{2a}{a+1} \quad \text{és} \quad \frac{2a}{a-1}$$

között foglaltatik.

Hasonlóképpen meggyőződhetünk, miszerint 1 e két utóbbi mennyiség által határolt intervallumon kívül fekszik.

Az egyedüli értékei b^2-nek, melyek a problémát kielégítik az

$$\left(1,\frac{2a}{a+1}\right) \quad \text{és} \quad \left(1,\frac{2a}{a-1}\right)$$

intervallumok közös értékei közt keresendők.

Ha tekintetbe vesszük a

$$\frac{2a}{a+1}-1=\frac{a-1}{a+1}$$

és a

$$\frac{2a}{a-1}-1=\frac{a+1}{a-1}$$

külömbségeket, azt látjuk, hogy az első intervallum a másodikban foglaltatik, ha a positív. Ha a negatív, a második intervallum foglaltatik az elsőben.