Az adott egyenlet a következő alakban írható:

$$(\sin 3x + \sin x) + (a \sin 2x + \sin x) = 0$$

Az első tag

$$\begin{aligned} \sin 3x + \sin x &= \sin 2x \ \cos x + \cos 2x \ \sin x + \sin x \\ &= \sin 2x \ \cos x + \sin x (1 + \cos 2x) \\ &= \sin 2x \ \cos x + \sin x (1 + \cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= \sin 2x \ \cos x + 2 \sin x \ \cos^2 x \\ &= 2 \sin 2x \ \cos x \\ &= 4 \sin x \ \cos^2 x \end{aligned}$$

A második tag

$$a \ \sin 2x + \sin x = \sin x (1 + 2a \ \cos x)$$

és így az egész egyenlet a következő alakot ölti:

$$\sin x (4 \cos^2 x + 2a \ \cos x + 1) = 0$$

Egy első megoldás $\sin x = 0$, miből

$$x = 0 \qquad \text{vagy} \qquad x = \pi$$

Másrészt az

$$f(\cos x) = 4 \cos^2 x + 2a \ \cos x + 1 = 0$$

egyenlet minden gyöke, mely $-1$ és $+1$ között foglaltatik $x$ számára két megoldást szolgáltat, u. m.

$$\alpha - t \qquad \text{és} \qquad 2\pi - \alpha - \mathrm{t}.$$

melyek positívok és $2\pi$-nél kisebbek.

Hogy az $f(\cos x) = 0$ egyenlet *egy* gyöke kielégítse e feltételt, szükséges és elegendő, miszerint

$$f(-1) f(+1) < 0^*$$

azaz

$$(5 - 2a)(5 + 2a) < 0$$

mely minthogy $a > 0$ egyenértékű ezzel:

$$a > \frac{5}{2}$$

Hogy *mind a két* gyök kielégítse a feltételt, kell, hogy egyidejűleg fennálljanak a következő relácziók:

$$(5 - 2a)(5 + 2a) \geqq 0 \qquad 1)$$

$$4a^2 - 16 \geqq 0 \qquad 2)$$

$$-1 < -\frac{a}{4} < 1 \qquad 3)$$

E feltételek azonban csak akkor vannak egyidejűleg kielégítve, ha

$$2 \leqq a \leqq \frac{5}{2}$$

Ha tehát $0 < a < 2$ az egyenletet csak az $x = 0$ és $x = \pi$ értékek elégítik ki.

$\star$) Lásd "másodfokú egyenlet diszkussziója" czímű czikket a "Középisk. Math. Lapok" első évfolyamában.