I. Tegyük fel, hogy

$$Y = x + y. \tag{1)}$$

Az ellipszis egy pontjának koordinátái közt a következő reláczió áll fenn;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{2)}$$

Számítsuk ki 2)-ből y értékét és helyettesítsük az 1)-be; lesz akkor

$$Y = x + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Kérdés, mi történik Y-nal, ha x értéke x_0-tól x_1-ig növekszik?

Legyen Y_0 és Y_1 az Y értéke $x = x_0$ és $x = x_1$-nél; akkor az $Y_1 - Y_0$ kifejezés értéke a következő:

$$x_1 - x_0 + \frac{b}{a}\left(\sqrt{a^2 - x_1^2} - \sqrt{a^2 - x_0^2}\right)$$

vagy

$$x_1 - x_0 - \frac{b}{a}\frac{x_1^2 - x_0^2}{\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - x_0^2}}$$

mely külömbség még a következő alakban írható

$$(x_1 - x_0)\left(1 - \frac{b}{a}\frac{x_1 + x_0}{\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - x_0^2}}\right)$$

Az $Y_1 - Y_0$ külömbség pozitív, zérus vagy negatív, a szerint a mint az

$$\frac{Y_1 - Y_0}{x_1 - x_0}$$

hányados pozitív, zérus vagy negatív. De ez utóbbi

$$1 - \frac{b}{a}\frac{x_1 + x_0}{\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - x_0^2}}$$

az $x_1 - x_0$ külömbség bármily csekély, tehát a *zérusnál* is. Ha tehát $x_1 = x_0 = x$ akkor

$$Y' = \lim \frac{Y_1 - Y_0}{x_1 - x_0} = \frac{a\sqrt{a^2 - x^2} - bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

vagy

$$Y' = \frac{a^4 - (a^2 + b^2)x^2}{a\sqrt{a^2 - x^2}(a\sqrt{a^2 - x^2} + bx)}$$

Minthogy x 0 és a határok közt változik, $\sqrt{a^2 - x^2}$ mindíg valós és a gyök pozitív értékeinél az Y' nevezője mindíg pozitív. Előjele tehát pusztán a számlálóétól függ. A számláló nagyobb, egyenlő vagy kisebb a zérusnál, a szerint, a mint

$$x \lesseqgtr \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Az Y változásainak táblázata tehát a következő:

$$\begin{array}{c|ccc} x & o & \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} & a \\ \hline Y' & + & o & - \\ \hline Y & b & \sqrt{a^2+b^2} & a \end{array}$$

vagyis, ha az x o-tól $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$-ig növekedik Y b-től $\sqrt{a^2+b^2}$-ig szintén növekedik, míg ha $x \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$-től a-ig tovább *növekedik,* Y $\sqrt{a^2+b^2}$-től a -ig fogy, vagyis Y-nak $\sqrt{a^2+b^2}$ *maximuma.*

Az M pontot, melynél Y értéke maximum, következőképpen szerkesztjük meg. Legyenek az ellipszis nagy tengelyének végpontjai A és A', kis tengelyének végpontjai B és B'. Ekkor

$$x_m = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2}{AB}.$$

Vigyük fel az OB egyenesre az $OD = AB$ hosszúságot és kössük össze D-t A'-tel. A'-ban emeljünk merőlegest $A'D$-re, míg az OB'-et E-ben metszi. OE a keresett x_m távolság.

Ugyanis a $DA'E$ derékszögű háromszögből folyik, miszerint

$$A'O^2 = OD \cdot OE$$

vagyis

$$OE = \frac{A'O^2}{OD} = \frac{a^2}{AB}.$$

II. Tegyük fel, hogy

$$Y = xy. \tag{3)}$$

Ezen egyenlet a 2) tekintetbe vételével a következő alakot nyeri:

$$Y = \frac{bx}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

melyből

$$Y' = \lim \frac{Y_1 - Y_0}{x_1 - x_0} = \frac{a^2b - 2bx^2}{a\sqrt{a^2-x^2}}$$

Ez utóbbinak előjele az

$$\frac{a^2}{2} - x^2$$

előjelétől függ. A következő táblázat mutatja xy változásait:

$$\begin{array}{c|ccc} x & o & \frac{a\sqrt{2}}{2} & a \\ \hline Y' & + & o & - \\ \hline Y & o & \frac{ab}{2} & o \end{array}$$

Ha $x = x_m = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $xy = \frac{ab}{2}$ = maximum. Az x_m szerkesztése igen egyszerű. Az OA felezési pontjából C-ből, mint középpontból leírjuk az $OC = AC$ sugarú kört. A C pontban merőlegest emelünk OA-ra. E merőleges és a kör metszéspontjainak bármelyike az O-tól a keresett x_m távolságra van.