

Legyen  $N$  a keresett szám és  $N'$  a megfordított szám; legyen továbbá  $N = p^2$ . Minden négyzet csak 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9-re végződvén, kell, hogy az  $N$  szám első számjegye is ezen számok egyike legyen, különben az  $N'$  nem lehetne teljes négyzet.

Mínt hogy

$$N = a10^5 + b10^4 + c10^3 + d10^2 + e10 + f$$

és

$$\begin{aligned} N' &= f10^5 + e10^4 + d10^3 + c10^2 + b10 + a, \\ N + N' &= (a + f)10^5 + (b + e)10^4 + (c + d)10^3 + \\ &\quad + (d + c)10^2 + (e + b)10 + f + a \end{aligned}$$

De ezen számnál a *páros* helyeken álló számjegyek összege egyenlő a *páratlan* helyeken álló számjegyek összegével, azaz

$$(a + f) + (c + d) + (e + b) = (b + e) + d + c + (f + a)$$

vagyis  $N + N' = k \cdot 11$ .

Két teljes négyzet összege azonban csak akkor osztható 11-gyel, ha mindegyik külön-külön osztható 11-gyel és így

$$N = m \cdot 11$$

és

$$p = n \cdot 11$$

Mínt hogy pedig  $N$  hatjegyű szám

$$\begin{aligned} 10^5 &< N < 10^6, \\ 316 &< p < 1000. \end{aligned}$$

Másrészt minthogy  $N$  vagy 1, vagy 4, vagy 5, vagy 6, vagy 9-czel kezdődik,  $N$  csak a következő határok közt fekszik:

$$\begin{aligned} &100000 \text{ és } 200000 \\ &400000 \text{ és } 700000 \\ &900000 \text{ és } 1000000. \end{aligned}$$

$$316 < p < 448$$

vagy

$$632 < p < 837$$

vagy végre

$$918 < p < 1000.$$

Látjuk tehát, hogy  $p$  oly többszöröse a 11-nek, mely a fönntebbi határok közt fekszik.

Hogy a további keresést megkönnyítsük, jegyezzük meg, miszerint ha  $N$  első számjegye 5,  $N'$  utolsó számjegye szintén 5; és minthogy minden 5-re végződő teljes négyzetben a tízes helyen álló számjegy 2, az  $N$  második számjegye ez esetben szintén 2 és így

$$520000 < N < 530000$$

vagy

$$721 < p < 729$$

Mínt hogy ezen határok között egyedül 726 többszöröse a 11-nek és ennek négyzete nem felel meg a feladatnak, kimondhatjuk, hogy  $N$  nem foglalhat 500000 és 600000 között és  $p$  nem fordulhat elő 708 és 774 között és nem is végződhetik 5-tel. Jegyezzük meg továbbá, hogy ha valamely teljes négyzet utolsó számjegye 1, 4 vagy 9, a tízes helyen álló számjegy páros és ha az utolsó számjegy 6 az utolsó-előtti páratlan. Ha tehát  $N$  első számjegye 1, 4 vagy 9, a második páros, míg ha az első 6 a második páratlan.

Ugyanis 1, 4 és 9-czel a következő alakú számok négyzetei végződnek:

$$10q + 1, \quad 10q \pm 2, \quad 10q \pm 3$$

és ezek

$$100q^2 + 10 \cdot 2q + 1, \quad 100q^2 \text{ pm } 10 \cdot 4q, \quad 100q^2 \pm 10 \cdot 6q + 9$$

míg 6-tal a következő alakú számok végződnek

$$10q \pm 4$$

melyek négyzete

$$100^2 \pm 10 \cdot 8q + 16 = 100q^2 + 10(\pm 8q + 1) + 6,$$

a mivel fentebbi állításaink igazolják.

Mindezek után csak a következő 11-gyel osztható számok jöhetnek tekintetbe:

319, 330, 352, 407, 429, 638, 649, 682, 693, 836, 990,

melyek közül

330, 836 és 990

elégítik ki a feladatot. Ezek négyzetei ugyanis

108900, 698896, 980100

és ezek megfordítva szintén teljes négyzeteket szolgáltatnak.