Segédtétel. Ha az ABC háromszögben az a oldalhoz tartozó középvonal $AA_1 = k$, akkor

$$b^2 + c^2 = 2k^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Bizonyítás. Legyen az a oldalhoz tartozó magasság $AA_2 = m$ és $A_1A_2 = x$. Az AA_2B és AA_2C derékszögű háromszögekből

$$b^2 = m^2 + \overline{BA}_2^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} + ax + x^2$$

és

$$c^2 = m^2 + \overline{CA}_2^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - ax + x^2,$$

tehát

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2(m^2 + x^2) = \frac{a^2}{2} + 2k^2.$$

Ha feladatunkban a kör középpontját O-val jelöljük, akkor e tétel szerint

$$\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 2\overline{PO}^2 + \overline{OC}^2.$$

Bárhol veszünk is fel a kör kerületén egy más P_1 pontot és a P_1CD háromszögre alkalmazzuk e tételt, akkor kapjuk, hogy

$$\overline{P_1C}^2 + \overline{P_1D}^2 = 2\overline{P_1O}^2 + \overline{OC}^2 = 2\overline{PO}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2,$$

tehát $\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$ összeg valóban állandó, ha a P pont a körön mozog.

(Pálos Tibor, Budapest.)