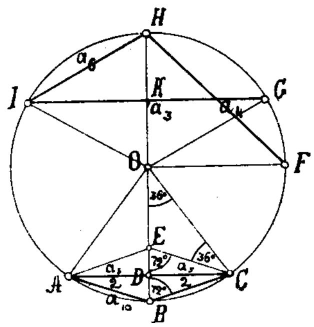
Mindenekelőtt kiszámítjuk a szabályos 3, 4, 5, 6 és 10-szög egy-egy oldalát. Ismeretes, hogy $a_6 = r$. -OIK háromszögből :

$$a_3 = 2\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = r\sqrt{3}.$$

-$OHF\triangle$-ből:

$$a_4 = r\sqrt{2}.$$

Legyen a szabályos tízszög egyik oldala $a_{10} = BC$. A hozzá tartozó középponti szög 36°.



Könnyen felismerhető, hogy $OBC\sphericalangle = BCO\sphericalangle = 72°$. Ha megfelezzük a C szöget, akkor $OCE\sphericalangle = EGB\sphericalangle = 36°$, $BEC\sphericalangle = 72°$. Ennélfogva $OBC\triangle \sim CBE\triangle$ s így

$$OB : BC = BC : EB,$$

de

$$OB = r,\ BC = EC = OE = a_{10},$$

$$EB = r - a_{10},$$

eme értékeket helyettesítve:

(3)
$$r : a_{10} = a_{10} : r - a_{10}.$$

Látjuk, hogy az E pont az *aranymetszés* szerint osztja az OB távolságot. ($OB : OE = OE : EB$).

(3)-ból ered:

$$a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Az ötszög egyik oldalát az ABD háromszögből számítjuk ki; ugyanis:

$$\left(\frac{a_5}{2}\right)^2 = a_{10}^2 - \left(\frac{r - a_{10}}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2 - \frac{r^2}{16}(3 - \sqrt{5})^2 = \frac{r^2}{16}(10 - 2\sqrt{5})$$

s így

$$a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

A most talált értékeket helyettesítsük a megadott egyenletekbe, akkor ered:

(1)
$$r^2 + 2r^2 = 3r^2 = a_3^2.$$

(2)
$$r^2 + \frac{r^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{r^2}{4}(10 - 2\sqrt{5}) = a_5^2.$$

Megoldások száma: 11.