

Első megoldás. Legyenek a körök középpontjai O_1 és O_2 , sugaraik r_1 és r_2 , továbbá a belső érintők érintéspontjai C és D , egymással való metszéspontjuk S , a belső érintőknek a külső érintővel való metszéspontjai A és B .

Ha $ABS\triangleleft = \alpha$, akkor

$$\begin{aligned} BAS\triangleleft &= 90^\circ - \alpha, & SBO_2\triangleleft &= 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \\ BO_2S\triangleleft &= 45^\circ + \frac{\alpha}{2}, & SAO_1\triangleleft &= 45^\circ + \frac{\alpha}{2}, & AO_1S\triangleleft &= 90^\circ - \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Mínt hogy

$$AO_1S\Delta \sim BO_2S\Delta,$$

azért

$$\frac{SA}{SO_1} = \frac{SO_2}{SB},$$

vagy

$$SA \cdot SB = SO_1 \cdot SO_2.$$

De az O_1CS és O_2DS háromszögekből

$$SO_1 = r_1\sqrt{2} \quad \text{és} \quad SO_2 = r_2\sqrt{2},$$

s így

$$SA \cdot SB = 2r_1r_2,$$

vagy

$$\frac{SA \cdot SB}{2} = r_1r_2.$$

(Bayer Nándor, Losonc.)

Második megoldás.

$$\begin{aligned} 2t &= \left(r_1 + r_1 \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \alpha}{2} \right) \left(r_2 + r_2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= r_1r_2 \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \left(1 + \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \right) = \\ &= r_1r_2 \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} + \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right) = \\ &= r_1r_2 \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right) = 2r_1r_2. \end{aligned}$$

(Sárközy Pál, Pannonhalma.)

Harmadik megoldás. Ha $AS = a$, $BS = b$, $AB = c$, akkor (*Math. Gyakorlókönyv II. 67.*)

$$r_1 = \frac{t}{s-a}, \quad r_2 = \frac{t}{s-b},$$

s így

$$\begin{aligned} r_1r_2 &= \frac{t^2}{(s-a)(s-b)} = s(s-c) = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} = \\ &= \frac{(a+b)^2 - c^2}{4} = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{4} = \frac{ab}{2}. \end{aligned}$$

Ennélfogva az ABS háromszög területe csakugyan r_1r_2 .

(Mellinger Endre, Budapest.)