

1°. Ismeretes, hogy (*Math. Gyakorlókönyv*, II. 508. feladat)

$$(1) \quad 16R^2 = (r_1 + r_2 + r_3 - r)^2$$

és hogy (u. o. 67. lap)

$$(2) \quad r = \frac{t}{s}, \quad r_1 = \frac{t}{s_1}, \quad r_2 = \frac{t}{s_2}, \quad r_3 = \frac{t}{s_3},$$

hol

$$s = \frac{a+b+c}{2}, \quad s_1 = s - a, \quad s_2 = s - b, \quad s_3 = s - c.$$

Ha (1)-ben a négyzetre emelést elvégezzük és (2)-ből az értékeket helyettesítjük, ered:

$$\begin{aligned} 16R^2 &= r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \frac{2t}{s_1} \left(\frac{t}{s_2} + \frac{t}{s_3} - \frac{t}{s} \right) + \frac{2t}{s_2} \left(\frac{t}{s_2} - \frac{t}{s} \right) - \\ &- 2 \cdot \frac{t}{s} \cdot \frac{t}{s_3} = r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \frac{2t^2}{ss_1s_2s_3} [s(s_1 + s_2 + s_3) - s_3(s_2 + s_1) - s_1s_2]. \end{aligned}$$

De a zárójelben álló kifejezés annyi mint

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

és (*Math. Gyakorlókönyv*, II. 508. feladat)

$$t^2 = ss_1s_2s_3$$

s így

$$a^2 + b^2 + c^2 + r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 16R^2.$$

2°.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{4t^2} + \frac{(b+c-a)^2}{4t^2} + \frac{(a+c-b)^2}{4t^2} + \frac{(a+b-c)^2}{4t^2} = \\ &= \frac{4(a^2 + b^2 + c^2)}{4t^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{t^2}. \end{aligned}$$

(Kürth Richárd, Nyitra.)