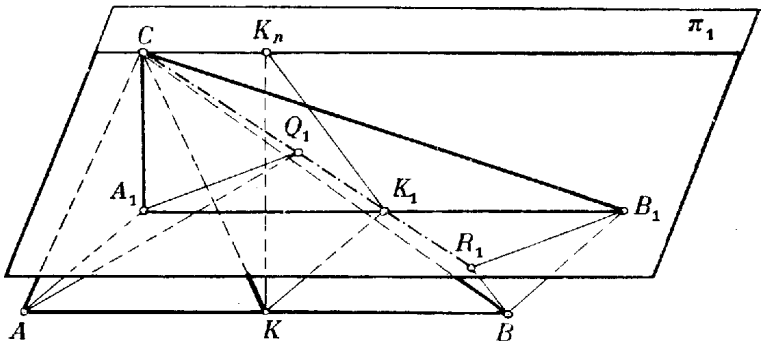
Jelöljük A, B, C-vel a háromszög csúcsait; K-val az AB oldal középpontját és k_n-nel a C csúcson át az AB- vel párhuzamosan haladó egyenest.



A keresett mértani hely mindenesetre egy kúpfelület, melynek csúcsa C. Tegyünk a C-n át egy AB-vel párhuzamos π_1 síkot, akkor ez átmegy a k_n egyenesen. Vetítsük e síkra az A, B és K pontokat és jelöljük e vetületeket rendre A_1, B_1 és K_1-gyel. Az ABC síkban a CK súlyvonal egyenlő távolságban van az A és B pontoktól, a π_1 síkban pedig a CK_1 egyenesnek van ilyen tulajdonsága. Hogy ezt kimutassuk, rajzoljunk az A_1 és B_1 pontokból merőlegeseket a CK_1-re és jelöljük a talppontokat Q_1, illetőleg R_1-gyel. Mivel A_1Q_1 az AQ_1-nek és B_1R_1 a BR_1-nek a π_1 síkra eső vetülete, azért az AQ_1 és BR_1 egyenesek is merőlegesek a CK_1-re.

Már most

$$AA_1Q_1\Delta \cong BB_1R_1\Delta,$$

mert

$$AA_1 = BB_1$$

$$A_1Q_1 = B_1R_1,$$

mert CK_1 a CA_1B_1 háromszög súlyvonala és végül

$$AA_1Q_1\sphericalangle = BB_1R_1\sphericalangle = 90^\circ.$$

Tehát csakugyan

$$AQ_1 = BR_1.$$

Ugyanígy megrajzolhatjuk a C ponton átmenő AB-vel párhuzamos π_2, π_3, ... síkokon is a K_2, K_3, ... pontokat és kimutatható, hogy a CK_2, CK_3, ... egyenesek mindegyike egyenlő távolra fekszik az A és B csúcsoktól.

Jelöljük a π síkok közt az ABC síkra merőlegest π_n-nel, a mely az ABC síkot éppen k_n-ben metszi. A k_n párhuzamos lévén AB-vel, egyenlő távolságban van az A és B pontoktól. K-ból a k_n-re rajzolt merőleges talppontját jelöljük K_n-nel, akkor K_iK_n a π_i síkban van és mivel KK_i merőleges π_i-re, tehát merőleges a talppontján átmenő összes egyenesekre és így K_iK_n-re is. Tehát

$$KK_iK_n\sphericalangle = 90^\circ.$$

A K, K_1, K_2, ..., K_i, ..., K_n pontok mértani helye tehát a KK_n, mint átmérő fölé rajzolt kör.

A keresett egyenesek mértani helye tehát az a kúppalást, melynek csúcsa C, s melynek a KK_n, mint átmérő fölé rajzolt kör egyik körmetszete.

(Hajdu Pál, Budapest.)