1°. Tételünket először abban a speciális esetben akarjuk bebizonyítani, midőn a $Q_1,\ Q_2,\ Q_3$ pontok a $P_1P_1',\ P_2P_2',\ P_3P_3'$ egyenesek végtelenben fekvő pontjai, tehát $Q_1,\ Q_2,\ Q_3$ pontok rendre felezik a $P_1P_1',\ P_2P_2',\ P_3P_3'$ diagonálisokat. A bizonyítandó tétel tehát ez esetben:

"A teljes négyoldal átlóinak felezéspontjai egy egyenesben vannak."

Bizonyítás. Jelöljék $A,\ B,\ C$ a $P_2'P_3,\ P_3P_1'$, illetőleg a $P_1'P_2'$ távolságok felezéspontjait, akkor

$$AB \parallel P_2'P_1'$$

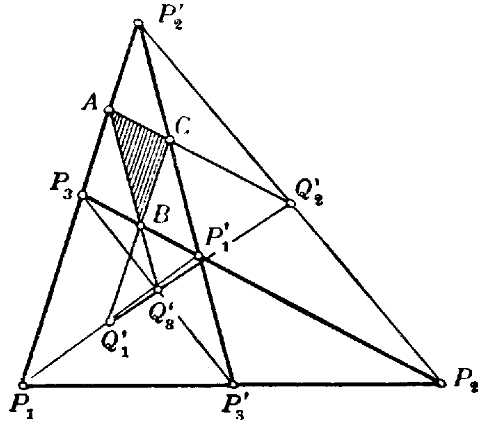
(1)
$$BC \parallel P_3P_2'$$

$$CA \parallel P_1'P_3,$$

tehát $AB,\ BC,\ CA$ felezik a $P_3P_3',\ P_1P_1'$, illetve a P_2P_2' diagonálisokat is, és így átmennek a $Q_3',\ Q_1',\ Q_2'$ pontokon.

Már most a $P_1'P_2'P_3$ háromszögnek a $P_1P_3'P_2$ transversálisa, tehát a Menelaos-féle tétel értelmében:

(2)
$$\frac{P_1'P_3'}{P_2'P_3'}\cdot\frac{P_2'P_1}{P_3P_1}\cdot\frac{P_3P_2}{P_1'P_3}=1.$$



Ámde (1) következtében:

$$\frac{P_1'P_3'}{P_2'P_3'}=\frac{BQ_3'}{AQ_3'}$$

$$\frac{P_2'P_1}{P_3P_1}=\frac{CQ_1'}{BQ_1'}$$

$$\frac{P_3P_2}{P_1'P_3}=\frac{AQ_2'}{CQ_2'}$$

amit (1)-be téve nyerjük:

(3)
$$\frac{BQ_3'}{AQ_3'}\cdot\frac{CQ_1'}{BQ_1'}\cdot\frac{AQ_2'}{CQ_2'}=1,$$

ami Menelaos tétele értelmében azt mondja, hogy az ABC háromszög oldalain fekvő $Q_1,\ Q_2,\ Q_3$ pontok egyazon egyenesen vannak.

2°. Az általános esetben felveszünk a térben egy S pontot és az egész alakzatot egy az (S_p) síkkal párhuzamos síkra vetítjük. E projekcióban a p-nek megfelelő egyenes végtelenbe jut, tehát az előző tétel értelmében a $Q_1',\ Q_2'\ Q_3'$ pontok vetületei egyazon egyenesben vannak, amiből azonban máris következik, hogy a $Q_1',\ Q_2'\ Q_3'$ maguk is egy egyenesen fekszenek.

(A.)