

Jelölje $K(ABD)$ az ABD háromszögnek az O_1O_2 tengely körül való forgásából keletkező test köbtartalmát, ugyanígy $K(AE_1E_2B)$ az AE_1E_2B forgásából keletkező test köbtartalmát s. í. t.

$$K(ABD) = K(AE_1E_2B) - K(E_1AD) - K(E_2BD)$$

és

$$K(\widehat{ADB}) = K(AE_1E_2B) - K(E_1\widehat{AD}) - K(E_2\widehat{BD}).$$

$$O_1E_1 = R \cos \alpha, \quad O_2E_2 = r \cos \alpha, \quad AE_1 = R \sin \alpha, \quad \text{és} \quad BE_2 = r \sin \alpha.$$

De

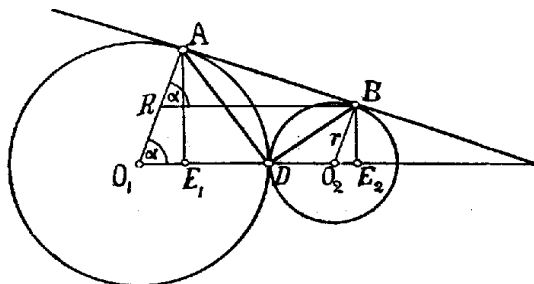
$$\cos \alpha = \frac{R-r}{R+r} \quad \text{és} \quad \sin \alpha = \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}$$

s így

$$E_1E_2 = R+r - O_1E_1 + O_2E_2 = R+r - R\frac{R-r}{R+r} + r\frac{R-r}{R+r} = \frac{4Rr}{R+r},$$

$$AE_1 = \frac{2R}{R+r}\sqrt{Rr} \quad \text{és} \quad BE_2 = \frac{2R}{R+r}\sqrt{Rr}.$$

$$\begin{aligned} K(AE_1E_2B) &= \frac{E_1E_2\pi}{3} [AE_1^2 + AE_1 \cdot BE_2 + BE_2^2] = \\ &= \frac{16\pi}{3} \frac{R^2r^2}{(R+r)^3} (R^2 + Rr + r^2), \end{aligned}$$



$$K(E_1AD) = \frac{AE_1^2 \cdot E_1D}{3} \pi = \frac{AE_1^2 (R - O_1E_1)}{3} \pi = \frac{8}{3} \pi \frac{R^4 r^2}{(R+r)^3},$$

$$K(E_2BD) = \frac{BE_2^2 \cdot E_2D}{3} \pi = \frac{BE_2^2 (r + O_2E_2)}{3} \pi = \frac{8}{3} \pi \frac{R^2 r^4}{(R+r)^3},$$

$$\begin{aligned} K(E_1\widehat{AD}) &= \frac{E_1D^2 \cdot \pi}{3} (3R - E_1D) = \frac{\pi}{3} (R - O_1E_1)^2 (2R + O_1E_1) = \\ &= \frac{4}{3} \pi \frac{R^3 r^2}{(R+r)^3} (3R+r), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} K(E_2\widehat{BD}) &= \frac{E_2D^2 \cdot \pi}{3} = (3r - E_2D) = \frac{\pi}{3} (r + O_2E_2)^2 (2r - O_2E_2) = \\ &= \frac{4}{3} \pi \frac{R^2 r^3}{(R+r)^3} (R+3r). \end{aligned}$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned} K(ABD) &= \frac{16\pi}{3} \frac{R^2 r^2}{(R+r)^3} (R^2 + Rr + r^2) - \frac{8}{3} \pi \frac{R^4 r^2}{(R+r)^3} - \\ &\quad - \frac{8}{3} \pi \frac{R^2 r^4}{(R+r)^3} = \frac{8}{3} \pi \frac{R^2 r^2}{R+r} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} K(\widehat{ADB}) &= \frac{16\pi}{3} \frac{R^2 r^2}{(R+r)^3} (R^2 + Rr + r^2) - \frac{4\pi}{3} \frac{R^3 r^2}{(R+r)^3} (3R+r) - \\ &\quad - \frac{4\pi}{3} \frac{R^2 r^3}{(R+r)^2} (R+3r) = \frac{4}{3} \pi \frac{R^2 r^2}{(R+r)}, \end{aligned}$$

tehát a két forgási test köbtartalmának viszonya

$$K(ABD) : K(\widehat{ADB}) = \frac{8}{3}\pi \frac{R^2 r^2}{(R+r)} : \frac{4}{3}\pi \frac{R^2 r^2}{(R+r)} = 2 : 1.$$

(Dömény Imre, Budapest.)

A feladatot még megoldották: Fodor H., Földes R., Fuchs I., Heimlich P., Jánosy Gy., Krampera Gy., Rosenberg J., Ruwald S., Székely J., Tandlich E.