

Első megoldás.

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + (2 \cos^2 x - 1) \sin x = 4 \sin x \cos^2 x - \sin x.\end{aligned}$$

Épp így

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= (1 - 2 \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = \cos x - 4 \sin^2 x \cos x.\end{aligned}$$

Egyenletünk tehát így alakul:

$$8 \sin x \cos^2 x + 4 \sin^2 x \cos x - 4 \cos x - 2 \sin x = 0,$$

tehát

$$= 2 \cos x(2 \sin x \cos x - 1) + \sin x(2 \sin x \cos x - 1) = 0,$$

vagyis

$$(\sin 2x - 1)(2 \cos x + \sin x) = 0.$$

Ha már most

$$\sin 2x - 1 = 0,$$

akkor

$$x_1 = 45^\circ \pm k\pi,$$

ha pedig

$$2 \cos x + \sin x = 0,$$

akkor $\cos x$ -szel szabad osztani, mert $x = 90^\circ$ nem gyök, tehát

$$\operatorname{tg} x = -2,$$

vagyis

$$x_2 = 116^\circ 33' 54'' \pm k\pi.$$

(Rosenberg Jenő, Keszthely.)

Második megoldás.

$$\sin 3x = \sin(2x + x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

és

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

tehát egyenletünk

$$6 \sin x - 8 \sin^3 x = 4 \cos^3 x,$$

$x = 90^\circ$ nem gyöke egyenletünknek, tehát szabad $2 \cos^3 x$ -szel minden tagot osztani:

$$3 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 4 \operatorname{tg}^3 x = 2.$$

Ámde

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x,$$

tehát

$$\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0.$$

Ez így is írható:

$$(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2) = 0.$$

Ha

$$\operatorname{tg} x - 1 = 0,$$

akkor

$$x_1 = 45^\circ \pm k\pi,$$

ha pedig

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0,$$

akkor

$$\operatorname{tg} x = \frac{-1 \pm 3}{2},$$

tehát

$$x_2 = 116^\circ 33' 54'' \pm k\pi.$$

(Haar Alfréd, Budapest.)