

Abból a körülményből, hogy a háromszögeket a húrokra mindig kétféleképpen szerkeszthetjük, következik, hogy e feladat, mindaddig feloldható, a míg az egymásutáni szerkesztések között bizonyos törvény áll fenn.

1. Először azt az esetet fogjuk vizsgálni, mikor a szerkesztett egyenlő szárú háromszögek mindig tompaszögűek.

Ha az adott ABC háromszögnek csúcsánál fekvő szöge α , a másik két szöge pedig $\beta = \gamma$ és az egymásután szerkesztett tompaszögű egyenlő szárú háromszögek csúcsai $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, az ugyanitt fekvő szögek pedig rendre $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ és a kör középpontja O , akkor az $ABCA_1$ húrnégyszögből:

$$\alpha_1 + \beta = 2R$$

és mert

$$\beta = R - \frac{\alpha}{2},$$

azért

$$\alpha_1 = R + \frac{\alpha}{2};$$

épp így általában

$$\alpha_n = R + \frac{\alpha_{n-1}}{2},$$

tehát

$$\begin{aligned} \alpha_n &= R + \frac{R}{2} + \frac{\alpha_{n-2}}{4} = R + \frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \frac{\alpha_{n-3}}{8} = \dots = \\ &= R + \frac{R}{2} + \dots + \frac{R}{2^{n-1}} + \frac{\alpha}{2^n} = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} + \alpha \cdot \frac{1}{2^n} = \\ &= 2R - (2R - \alpha) \cdot \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

és mivel $n = \infty$ esetében

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

azért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 2R.$$

2. Legyen most a szerkesztett egyenlő szárú háromszög mindig hegyesszögű és jelöljük a csúcsokat $A', A'', \dots, A^{(n)}, \dots$; a csúcsoknál lévő szögeket $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(n)}, \dots$ -vel, az $AA'CA_1$ húrnégyszögből:

$$\alpha' + \alpha_1 = 2R$$

és mert

$$\alpha_1 = R + \frac{\alpha}{2},$$

azért

$$\alpha' = R - \frac{\alpha}{2}$$

és általában

$$\alpha^{(n)} = R - \frac{\alpha^{(n-1)}}{2}$$

és így

$$\begin{aligned} \alpha^{(n)} &= R - \frac{R}{2} + \frac{R^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{R}{2^{n-1}} + (-1)^n \frac{\alpha}{2^n} = \\ &= R \cdot \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2}} + (-1)^n \alpha \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{2}{3}R + \left(\frac{2}{3}R + (-1)^n \alpha \right) \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

tehát $n = \infty$ esetében

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{(n)} = \frac{2R}{3} = 60^\circ.$$

Ez esetben határháromszögül tehát a körbe írható szabályos háromszöget kapjuk.

(Pichler Sándor, Budapest.)

A feladatot még megoldották: Bartók I., Jánosy Gy., Neidenbach E., Székely J. *Egy esetre szorítottak:* Dömény I., Havas E., Haar A., Kertész G., Kiss J., Szűcs A.