A feladatot először egészen általánosan fogjuk megoldani. Legyenek tehát az adott egyenletek:

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

és

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \tag{2}$$

A feladatunkat kielégítő pont koordinátái legyenek x_0 és y_0, akkor ennek távolsága az (1) egyenestől d, föltéve, hogy C nem pozitív:

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3}$$

Mikor éri el d eminens értékét? Ugyanakkor, midőn az

$$F = d\sqrt{A^2 + B^2} - C = Ax_0 + By_0 \tag{4}$$

függvény.

Mivel az $x_0,\ y_0$ pont a (2) ellipsisen fekszik, azért a feladat a következő:

Az $x_0,\ y_0$-nak mely értéke mellett éri el az

$$F = Ax_0 + By_0 \tag{4}$$

függvény eminens értékét, feltéve, hogy:

$$b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0. \tag{5}$$

Már most (5)-ből:

$$y_0 = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2},$$

tehát

$$F = Ax_0 \pm \frac{bB}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2} = ax_0 + \beta\sqrt{\gamma - x^2},$$

honnan:

$$F^2 = a^2x_0^2 \pm 2\alpha\beta x_0\sqrt{\gamma - x_0^2} - \beta^2x^2 + \beta^2\gamma.$$

Adjuk ezen egyenlethez a következő egyenlőséget:

$$\left[\beta x_0 \mp \alpha\sqrt{-x_0^2 + \gamma}\right]^2 = \beta^2x^2 \mp 2\alpha\beta x_0\sqrt{\gamma - x^2} - \alpha^2x^2 + \alpha^2\gamma,$$

akkor:

$$F^2 + \left[\beta x_0 \mp \alpha\sqrt{\gamma - x_0^2}\right]^2 = \gamma(\alpha^2 + \beta^2),$$

miből

$$F = \pm\sqrt{\gamma(\alpha^2 + \beta^2) - \left[\beta x_0 \mp \alpha\sqrt{\gamma - x_0^2}\right]^2}.$$

F tehát akkor éri el eminens értékét, ha

$$\beta x_0 \mp \alpha\sqrt{\gamma - x_0^2} = 0,$$

vagyis midőn:

$$x_0 = \frac{\pm\alpha\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\pm Aa^2}{\sqrt{a^2A^2 + b^2B^2}}. \tag{α}$$

A hozzátartozó y_0 értékek az (5)-ből adódnak ki, ha oda x_0 értékét betesszük:

$$y_0 = \pm\frac{Bb^2}{\sqrt{a^2A^2 + b^2B^2}}. \tag{β}$$

Tehát két olyan pontunk van, melyre nézve d eminens értékű, úgy mint

$$P_1\left\{x_0' = Aa^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2A^2 + b^2B^2}};\ y_0' = Bb^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2A^2 + b^2B^2}}\right\}$$

$$P_2\left\{x_0''=-Aa^2\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2A^2+b^2B^2}};\ y_0''=-Bb^2\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2A^2+b^2B^2}}\right\}.$$

A mi esetünkben

$$a=3,\ b=2,\ A=-1,\ B=2,$$

tehát

$$P_1=\left\{-\frac{9}{5};\frac{8}{5}\right\}\qquad\text{és}\qquad P_2=\left\{\frac{9}{5};-\frac{8}{5}\right\}.$$

Ha az adott egyenes távolsága P_1-től d_1 és P_2-től d_2, akkor (3)-ból:

$$d_1=\frac{(a^2A^2+b^2B^2)+C\sqrt{a^2A^2+b^2B^2}}{\sqrt{a^2A^2+b^2B^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2}}=\sqrt{\frac{a^2A^2+b^2B^2}{A^2+B^2}}+C\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

és

$$d_2=-\sqrt{\frac{a^2A^2+b^2B^2}{A^2+B^2}}+C\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Már most a gyökjelek alatt csakis pozitív számok állanak, tehát

$$\sqrt{\frac{a^2A^2+b^2B^2}{A^2+B^2}}+=m>0$$

és

$$\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=n>0.$$

C föltételünk szerint negatív szám volt, tehát:

$$-C=c>0$$

és így

$$d_1=m-cn$$

$$d_2=-(m+cn),$$

tehát a d_2 abszolut értéke nagyobb a d_1 abszolut értékénél, vagyis az $(x_0',\ y_0')$ ponthoz minimum, míg az $(x_0'',\ y_0'')$ ponthoz maximum tartozik.

Ha még az (α) és (β) alatti értékét az x_0 és y_0-nak megnézzük, észrevesszük, hogy azokban a C nem fordul elő, vagyis a P_1 és P_2 pontok helyzete C-től független, ellenben $\frac{B}{A}$-tól függ, mert:

$$x_0=\frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2+b^2\left(\frac{B}{A}\right)^2}}\qquad\text{és}\qquad y_0=\frac{\pm b^2}{\sqrt{a^2+b^2\left(\frac{B}{A}\right)^2}}.$$

És mivel $-\frac{B}{A}$ az adott egyenes iránytényezője, világos, hogy az adott egyenessel párhuzamos minden egyeneshez egyazon P_1 és P_2 pontok tartoznak. Húzzunk most pl. P_1-en át párhuzamosat az adott egyenessel, mely az ellipsist még egy P_1' pontban metszi, ekkor P_1' távolsága az (1) egyenestől szintén d_1 lenne, miből az következnék, hogy *két* olyan pontunk van az ellipsisen, melynek távolsága (1)-től minimális, a mi eredményeinkkel ellenkeznék; kell tehát, hogy P_1' összeessék P_1-gyel, vagyis P_1 illetőleg a P_2 pontokban az adott egyenessel vont párhuzamosak érintői az ellipsisnek, a mi különben közvetlen úton is kimutatható. Pl. a P_1-ben vont érintő egyenlete ugyanis:

$$\frac{xx_0'}{a^2}+\frac{yy_0'}{b^2}=1,$$

a honnan $x_0',\ y_0'$ értékeinek behelyettesítése után:

$$Ax+By=\sqrt{a^2A^2+b^2B^2},$$

tehát ezen érintő iránytényezője is: $-\frac{B}{A}$.

(Antal Márkus.)

Megoldást küldtek be: Ádámffy E., Bartók I., Braun I., Dömény E., Dömény I., Enyedi B., Haar A., Kürti I., Liebner A., Neidenbach E., Pichler S., Rosenberg J., Riesz K., Szombathy J., Szűcs A.