Segédtételek. Ha az ABC háromszög körül írt kör sugara R, a beírt kör sugara r és a háromszög szögei $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, akkor a háromszög területe

$$T=2R^2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$$

vagy

$$T=r^2\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Bizonyítás. (a) Ha a háromszög oldalainak hossza $a,\ b,\ c$, akkor

$$T=\frac{abc}{4R}$$

és mivel

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{b}{2\sin\beta}=\frac{c}{2\sin\gamma},$$

tehát

$$T=\frac{2R\sin\alpha\cdot 2R\sin\beta\cdot 2R\sin\gamma}{4R}=2R^2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma.$$

(b) Másrészt

$$T=\frac{r}{2}(a+b+c),$$

ámde

$$r=\frac{a}{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}=\frac{b}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{c}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}},$$

tehát

$$T=r^2\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right).$$

Azonban

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\left[\frac{\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}\right]=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}=$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}=$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

vagyis tényleg

$$T=r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Ezek után áttérhetünk feladatunk megoldására. Legyen az adott ABC háromszög köré írt kör középpontja O és sugara r. Az érintő háromszög csúcspontjait pedig $A_1,\ B_1,\ C_1$ és szögeit $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1$-gyel jelöljük és legyen ABC háromszög területe t, az $A_1,\ B_1,\ C_1$ háromszögé pedig T, akkor

$$T=r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha_1}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta_1}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma_1}{2}$$

és

$$t=2r^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma.$$

Csak az $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1$ szögeket kell kiszámítanunk. A_1BOC négyszögből (mert $A_1BO\sphericalangle$ és A_1CO szögek derékszögek):

$$\alpha_1+BOC\sphericalangle=\alpha_1+2\alpha=180^\circ,$$

tehát

$$\alpha_1=2(90^\circ-\alpha)$$

és így

$$T=r^2\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma.$$

Már most

$$T:t=r^2\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma:2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=1:2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma.$$

Jelen esetben

$$T:t=1:0,219865.$$

(Kiss József, Pápa.)

A feladatot még megoldották: Bartók I., Braun I., Dömény I., Dömény E., Enyedi B., Glück I., Haar A., Jánosy Gy., Kertész G., Kürti I., Liebner A., Messer P., Neidenbach E., Pám M., Pichler S., Pivnyik I., Popoviciu M., Rássy P., Riesz K., Rosenberg I., Schwarz Gy., Sonnenfeld I., Szűcs A., Schwemmer I.