Legyen az adott háromszög ABC. Jelöljük az egyes oldalak középpontjait $A_1,\ B_1,\ C_1$-gyel; a magasságok talppontjait $A_2,\ B_2,\ C_2$-vel és messék a szögfelezők az egyes oldalakat az $A_3,\ B_3,\ C_3$ pontokban. A háromszög (S) súlypontját és a beírt kör (O) középpontját összekötő egyenes a $BC,\ CA,\ AB$ oldalakat rendre az $L_1,\ M_1,\ N_1$ pontokban találja, melyeknek az $L_2,\ M_2,\ N_2$ simmetrikus pontok felelnek meg.

1°. *Segédtétel:* Ha az O kör a háromszög oldalait az $A_4,\ B_4$ és C_4 pontokban érinti, akkor:

$$A_1A_2\cdot A_1A_3=\overline{A_1A_4}^2.$$

Bizonyítás. Írjunk az ABC háromszög köré kört. Mivel mind a BC oldalt merőlegesen felező egyenes, mind az A szög felező egyenese felezik a BC ívet, azért mindkettő a BC ív A' középpontján megy keresztül, miért is

$$A_3BA'\sphericalangle=BAA'\sphericalangle=\frac{A}{2}\sphericalangle.$$

Tehát

$$A_3BA'\triangle\sim BAA'\triangle$$

és így

$$A'A_3:A'B=A'B:A'A$$

vagyis

(1) $$\overline{A'B}^2=A'A\cdot A'A_3.$$

Ámde

$$OBA'\sphericalangle=BOA'\sphericalangle=\frac{A\sphericalangle+B\sphericalangle}{2}$$

tehát

(2) $$A'B=A'O.$$

A (2)-ből $A'B$ értékét (1)-be téve

$$\overline{A'O}^2=A'A\cdot A'A_3.$$

Az AA' szögfelező pontjait a BC-re projiciálva nyerjük, hogy

$$\overline{A_1A_4}^2=A_1A_2\cdot A_1A_3.$$

Természetesen ugyanezek a viszonyok érvényesek a $B_1,\ B_2,\ B_3$ és a $C_1,\ C_2,\ C_3$ pontokra nézve is.

2°. Tételünket már most így mutathatjuk ki:

Az A_3AA_1 háromszögnek szelője az OS, tehát Menelaos tételénél fogva

(3) $$\frac{A_3L_1}{A_1L_1}\cdot\frac{A_1S}{AS}\cdot\frac{AO}{A_3O}=1.$$

Mivel

$$\frac{A_1S}{AS}=-\frac{1}{2}\quad\text{és}\quad\frac{AO}{A_3O}=\frac{A_2A_4}{A_3A_4},$$

azért a (3) egyenlőség így alakul:

$$\frac{A_3L_1}{A_1L_1}=-2\frac{A_3A_4}{A_2A_4}$$

vagy

$$\frac{A_1L_1-A_1A_3}{A_1L_1}=-2\frac{A_1A_4-A_1A_3}{A_1A_4-A_1A_2}.$$

A segédtétel alkalmazásával

$$\frac{A_1L_1-\frac{\overline{A_1A_4}^2}{A_1A_2}}{A_1L_1}=-2\frac{A_1A_4-\frac{\overline{A_1A_4}^2}{A_1A_2}}{A_1A_4-A_1A_2},$$

melyet rendezve

$$A_1L_1\cdot A_1A_2\cdot A_1A_4=\overline{A_1A_4}^3+2\overline{A_1A_4}^2\cdot A_1L_1-A_1A_2(\overline{A_1A_4}^2-A_1A_2\cdot A_1L_1+2A_1A_4\cdot A_1L_1)$$

vagy A_1A_4-gyel osztva:

$$A_1L_1\cdot A_1A_2=\overline{A_1A_4}^2+2A_1A_4\cdot A_1L_1-\frac{A_1A_2}{A_1A_4}(\overline{A_1A_4}^2-A_1A_2\cdot A_1L_1+2A_1A_4\cdot A_1L_1),$$

innen

$$A_1L_1 \cdot A_1A_2 + \overline{A_1L_1}^2 = \overline{A_1A_4}^2 + 2A_1A_4 \cdot A_1L_1 + \overline{A_1L_1}^2 -$$
$$-\frac{A_1A_2}{A_1A_4}(\overline{A_1A_4}^2 + 2A_1A_4 \cdot A_1L_1 + \overline{A_1L_1}^2 - A_1A_2 \cdot A_1L_1 - \overline{A_1L_1}^2),$$

tehát A_1L_1 helyébe $-A_1L_2$-t téve

$$-A_1L_2(A_1A_2 - A_1L_2) = (A_1A_4 - A_1L_2)^2 - \frac{A_1A_2}{A_1A_4}[(A_1A_4 - A_1L_2)^2 + A_1L_2(A_1A_2 - A_1L_2)]$$

tehát

$$L_2A_1 \cdot L_2A_2 = \overline{L_2A_4}^2 - \frac{A_1A_2}{A_1A_4}(\overline{L_2A_4}^2 - L_2A_1 \cdot L_2A_2),$$

miért is

$$\left(\frac{A_1A_2}{A_1A_4} + 1\right)(\overline{L_2A_4}^2 - L_2A_1 \cdot L_2A_2) = 0$$

és így egyszerűsítés után

$$\overline{L_2A_4}^2 = L_2A_1 \cdot L_2A_2$$

épp így

$$\overline{M_2B_4}^2 = M_2B_1 \cdot M_2B_2$$
$$\overline{N_2C_4}^2 = N_2C_1 \cdot N_2C_2.$$

Az $L_2,\ M_2,\ N_2$ pontok hatványa tehát a Feuerbach-féle és a beírt körre vonatkozólag rendre egyenlők, miért is az $L_2,\ M_2,\ N_2$ pontok a két kör hatványvonalán feküsznek. Mivel pedig a Feuerbach-féle kör érinti a beírt és kívül érintő köröket, tehát a hatványvonal egyszersmind a közös érintési pontban vont közös érintő, vagyis a reciprok egyenes a megfelelő érintő kört és a Feuerbach-féle kört tényleg közös pontjukban érinti.

A többi érintőkre tételünket analóg úton bizonyíthatjuk be.

(Riesz Marczel, Győr.)

A feladatot még megoldották: Bartók I., Deutsch E., Deutsch I., Enyedi B., Haar A., Pivnyik I., Riesz K., Szmodics H.