I. megoldás.

$$1^n+2^n+3^n+4^n=1^n+2^n+(5-2)^n+(5-1)^n=$$

$$=1^n+2^n+5^n-\binom{n}{1}5^{n-1}\cdot 2+\ldots\pm\binom{n}{n-1}5\cdot 2^{n-1}+\binom{n}{n}(-2)^n+$$

$$+5^n-\binom{n}{1}5^{n-1}+\ldots\pm\binom{n}{n-1}5+(-1)^n;$$

e kifejezés osztható 5-tel, ha

$$1^n+2^n+(-2)^n+(-1)^n$$

0, vagy osztható 5-tel; így ha n páratlan; ha pedig

$$n=2\nu,$$

akkor

$$2(2^{2\nu}+1^{2\nu})=2(4^\nu+1^\nu),$$

tehát, ha ν páratlan, akkor a kifejezés osztható az alapok összegével: 5-tel, ellenben nem osztható, ha ν páros, vagyis n többszöröse 4-nek.

(Pivnyik István, Nyíregyháza.)

II. megoldás.

Legyen először n páratlan szám és írjuk le az adott kifejezést a következő módon:

$$A=(5-4)^n+4^n(5-3)^n+3^n.$$

Az $(5-4)^n$ kifejezés kifejtésében az utolsó (-4^n) tag lesz az egyedüli, mely 5-tel nem osztható, de ezt a tagot az utána következő $+4^n$ megsemmisíti s így $(5-4)^n+4^n$ osztható 5-tel. Éppígy kimutathatjuk ezt $(5-3)^n+3^n$-re nézve is s így e két kifejezés összege: A szintén 5-nek többszöröse.

Ha másodszor n páros ($n=2m$), akkor így írhatjuk kifejezésünket:

$$A=1^m+4^m+9^m+16^m=(10-1)^m+1^m+(20-4)^m+4^m.$$

Ha feltesszük, hogy m páratlan, tehát n 4-gyel nem osztható páros szám, akkor a $(10-1)^m$ és $(20-4)^m$ kifejezések utolsó tagjait az 1^m és 4^m tagok, hasonlóan, mint előbb, ismét megsemmisítik. A tehát ez esetben is 5-nek többszöröse. Bebizonyítottuk most már A oszthatóságát 5-tel azon esetekben, midőn n 4-gyel nem osztható. Most még bebizonyítandó, hogy A nem osztható 5-tel, ha n osztható 4-gyel, ha tehát $n=4m$. Ez esetben:

$$A=(1^4)^m+(2^4)^m+(3^4)^m+(4^4)^m=1^m+16^m+81^m+256^m$$

Az $1,\ 16,\ 81,\ 256$ számok mindegyike 5-tel osztva maradékul 1-et ád s így hasonlóképp n-edik hatványuk is. Négy ily hatvány összege $5k+4$ alakú s így A ez esetben 5-tel nem osztható.

(König Dénes, Budapest.)

A feladatot még megoldották: Bartók I., Demjén E., Deutsch E., Deutsch I., Enyedi B., Haar A., Heimlich P., Hirschfeld Gy., Kertész G., Kürti I., Liebner A., Ligeti P., Moskovits Zs., Neidenbach E., Preisich G., Raab R., Riesz K., Riesz M., Schuster Gy., Selényi P., Szücs A., Veres G., Weisz P.