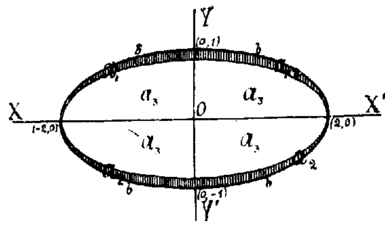
Az adott egyenlet discriminánsa:

$$(1) \qquad -4y^2 - x^2 + 4 \gtreqless 0$$

a szerint, a mint a gyökök valósak, egyenlők vagy képzetesek. (1) így is írható:

$$4y^2 + x^2 - 4 \lesseqgtr 0.$$

A $4y^2 + x^2 - 4 = 0$ oly ellipsis egyenlete, melynek középpontja a coordinata-rendszer kezdőpontja, nagy tengelyének végpontjai: $(-2,\ 0)$ és $(2,\ 0)$, kis tengelyének végpontjai pedig $(0,\ 1)$ és $(0,\ -1)$.



Már most

(a) a gyökök valósak, ha

$$4y^2 + x^2 - 4 < 0,$$

vagyis ha az $(x,\ y)$ pont az említett ellipsisen belül van.

(b) a gyökök egyenlők, ha

$$4y^2 + x^2 - 4 = 0;$$

ez esetben az $(x,\ y)$ pontok mértani helye az ellipsis kerülete;

(c) a gyökök képzetesek, ha

$$4y^2 + x^2 - 4 > 0;$$

ekkor $(x,\ y)$ bármely az ellipsisen kívül fekvő pontot jelenthet.

(a_1) Mindkét gyök positív, ha összegük: $y > 0$ és szorzatuk:

$$\frac{1}{4}(5y^2 + x^2 - 4) > 0;$$

$(x,\ y)$ tehát minden oly pont lehet, mely az említett ellipsis és az $5y^2+x^2-4=0$ egyenletű ellipsis közt, az xx' tengely felett van. Eme ellipsis nagy tengelyének végpontja: $(-2,\ 0)$ és $(2,\ 0)$; kis tengelyének végpontjai pedig: $\left(0,\ \sqrt{\frac{4}{5}}\right)$ és $\left(0,\ -\sqrt{\frac{4}{5}}\right)$.

(a_2) Épp így a két ellipsis közt, de az xx' tengely alatt vannak a pontok, ha mindkét gyök negatív.

(a_3) Végül, ha a gyökök ellenkező előjelűek, akkor szorzatuk, s így $5y^2 + x^2 - 4$ is < 0, tehát $(x,\ y)$ a kis ellipsisen belül lévő minden pontot jelenthet, mert ezek egyszersmind a nagy ellipsisen is belül lesznek.

(Kőnig Dénes, Budapest.)

A feladatot még megoldották: Bartók I., Dömény I., Enyedi B., Haar A., Kürti I., Pivnyik I., Riesz K., Riesz M., Szücs A.