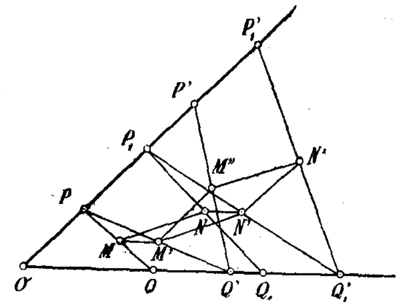
Első segédtétel. Valamely szög szárain felvesszük a $PP_1 = a$ és $QQ_1 = b$ állandó hosszúságú vonaldarabokat. Kimutatjuk, hogy PQ és P_1Q_1 egyenesek középpontjait összekötő egyenes iránya nem változik, bárhol vesszük is fel az állandó a és b távolságokat. (1. ábra.)



Toljuk ugyanis QQ_1-et a $Q'Q_1'$ helyzetbe és legyenek a PQ, PQ', P_1Q_1, P_1Q_1' távolságok középpontjai rendre: M, M', N, N'. Minthogy MM' és NN' a PQQ', illetőleg a $P_1Q_1Q_1'$ háromszögek két-két oldalfelező pontjának összekötő egyenesei, azért:

$$MM' = \frac{1}{2}QQ', \qquad NN' = \frac{1}{2}Q_1Q_1'$$

és

$$MM' \parallel QQ' \qquad NN' \parallel Q_1Q_1'.$$

Ámde QQ' és Q_1Q_1' egy egyenesbe esnek és $QQ_1 = Q'Q_1'$, tehát

$$MM' = NN'$$

és

$$MM' \parallel NN'.$$

$MM'N'N$ tehát parallelogramma és így az MN tényleg párhuzamos $M'N'$-nel. Most ismét PP_1-et tolhatjuk a tetsző-leges $P'P_1'$ helyzetbe. Ha $P'Q'$ középpontját M''-mel, $P_1'Q_1'$ középpontját N''-nel jelölöm, akkor éppúgy, mint előbb

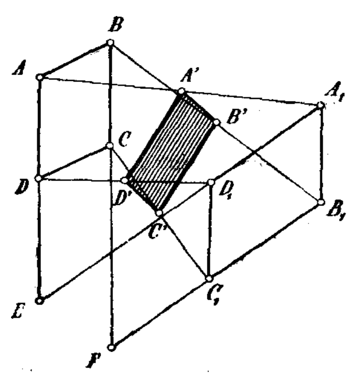
$$M''N'' \parallel M'N' \text{ tehát } \parallel MN$$

miáltal tételünk beigazolást is nyert.

Az állandó MN irányt legegyszerűbben úgy nyerhetjük, ha P-t és Q-t is a szög O csúcspontjában vesszük fel és ezt összekötjük $P'Q'$-nak N középpontjával. Ezen összekötő egyenes felezi minden $P'Q'$-val párhuzamos egyenesnek a szög szárai közt lévő részét és mivel minden ilyen parallel egyenes O-tól kezdve $OP' : OQ'$ arányú szeleteket vág le a szárakból és viszont, ha két ily szelet viszonya $OP' : OQ'$, akkor a végpontjait összekötő egyenes párhuzamos $P'Q'$-val, azért érvényes a következő tétel is:

Második segédtétel. Az MN irány akkor is állandó marad, ha a PP_1 és QQ_1 vonaldaraboknak csak a viszonyuk állandó.

Ezek után áttérünk a kitűzött tétel bizonyítására:



1°. (2. ábra.) Legyen AD és A_1D_1 metszése E-ben; BC és B_1C_1 metszéspontia pedig F-ben, akkor

$$AEA_1\sphericalangle = BFB_1\sphericalangle$$

(száraik párhuzamosak) és

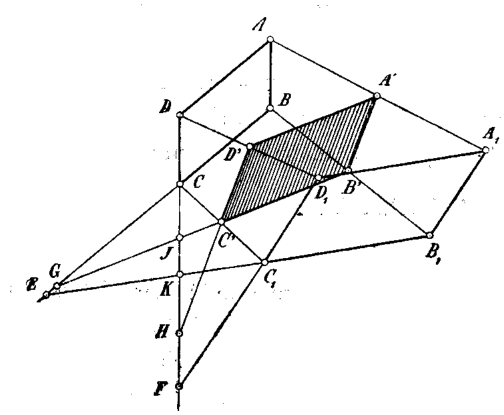
$$AD = BC \quad \text{és} \quad A_1D_1 = B_1C_1,$$

tehát az első segédtétel értelmében $A'D'$ az A_1D_1E-vel épp akkora szöget zár be, mint $B'C'$ a B_1C_1F egyenessel. Ámde:

$$A_1D_1 \parallel B_1C_1$$

és így
$$A'D' \parallel B'C'.$$
Hasonlóképpen
$$A'B' \parallel D'C',$$
tehát $A'B'C'D'$ csakugyan parallelogramma.

2°. Legyenek most az adott parallelogrammák hasonlók. (3. ábra.)



Ki fogjuk mutatni, hogy
$$B'C'D'\triangle \sim BCD\triangle$$
és
$$A'B'D'\triangle \sim ABD\triangle$$
mi által tételünk második fele is beigazolást nyer. Nevezzük e végből BC és B_1C_1 metszéspontját E-nek, DC és D_1C_1 metszését F-nek és a DC meg B_1C_1 metszéspontját K-nak; akkor minthogy
$$DCB\sphericalangle = D_1C_1B_1\sphericalangle$$
azért
$$ECK\sphericalangle = KC_1F\sphericalangle.$$
Továbbá
$$CKE\sphericalangle = C_1KF\sphericalangle$$
és így
$$CKE\triangle \sim C_1KF\triangle,$$
tehát
$$KEC\sphericalangle = KFC_1\sphericalangle.$$

Mivel $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$, azért a KEC szárain lévő BC és B_1C_1 szeletek aránya egyenlő a $KFC_1\sphericalangle$ szárain lévő DC és D_1C_1 szeletek arányával. Második segédtételünk értelmében tehát:
$$CGC'\sphericalangle \sim CHC'\sphericalangle,$$
hol G a BC és $B'C'$ egyenesek, H pedig a DC és $D'C'$ egyenesek metszése. Ha DC a $B'C'$-t I-ben metszi, akkor tehát:
$$CGI\triangle \sim C'HI\triangle,$$
miért is
$$GCI\sphericalangle = HC'I\sphericalangle$$
és csúcsszögeik:
$$DCB\sphericalangle = D'C'B'\sphericalangle.$$
Hasonlóképpen kimutatható, hogy a $B'C'D'\triangle$ többi szögei s az $A'B'D'\triangle$ szögei is a $BCD\triangle$ többi szögeivel, illetőleg az $ABD\triangle$ szögeivel egyenlők, tehát valóban:
$$ABCD \sim A'B'C',' D' \sim A_1B_1C_1D_1.$$

(König Dénes. Budapest.

A feladatot még megoldották: Bartók I., Deutsch I., Pivnyik I.