Legyen ABC a keresett, $O_1O_2O_3$ pedig az adott körök középpontjai által meghatározott háromszög, s legyenek D, D_1, E, E_1, F és F_1 a keletkezett érintési pontok. A keresett terület ekkor

$$T = ADO_1D_1 + BEO_2E_1 + CFO_3F_1 + DEO_2O_1 + E_1F_1O_3O_2 + FD_1O_1O_3 + O_1O_2O_3.$$

De

$$ADO_1D_1 = 2ADO_1 = r_1 \cdot AD = r_1^2 \operatorname{ctg}\frac{A}{2},$$

hasonlóképpen

$$BEO_2E_1 = r_2^2 \operatorname{ctg}\frac{B}{2} \text{ és } CFO_3F_1 = r_3^2 \operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

Továbbá

$$DEO_2O_1 = \frac{r_1 + r_2}{2}\sqrt{(r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2} = (r_1+r_2)\sqrt{r_1r_2},$$

éppen így

$$E_1F_1O_3O_2 = (r_2+r_3)\sqrt{(r_2r_3}(r_1+r_2)\sqrt{r_1r_2} \quad \text{és} \quad FD_1O_1O_3 = (r_3+r_1)\sqrt{(r_1r_3}$$

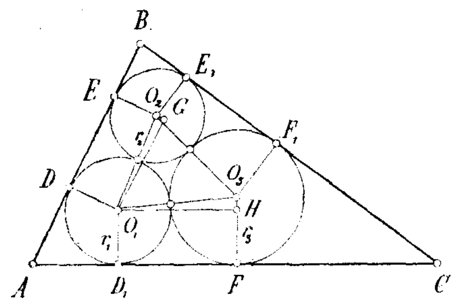
s végre

$$O_1O_2O_3 = \sqrt{(r_1+r_2+r_3)r_1r_2r_3},$$

tehát

$$T = r_1^2 \operatorname{ctg}\frac{A}{2} + r_2^2 \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + r_3^2 \operatorname{ctg}\frac{C}{2} +$$

$$+ (r_1+r_2)\sqrt{(r_1r_2} + (r_2+r_3)\sqrt{(r_2r_3} + (r_3+r_1)\sqrt{(r_1r_3} + \sqrt{(r_1+r_2+r_3)r_1r_2r_3}.$$



Határozzuk most meg az ABC háromszög egyik, pl. A szögét. Bocsássunk e végből O_1-ből EO_2-re és FO_3-ra merőlegest, miáltal a G és H pontokat kapjuk.

Ekkor

$$A\sphericalangle = O_2O_1O_3\sphericalangle + O_3O_1H\sphericalangle - O_2O_1G\sphericalangle,$$

hol a jobb oldalon levő szögeket a

$$\sin\frac{O_2O_1O_3}{2} = \sqrt{\frac{r_2r_3}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)}},$$

$$\sin O_3O_1H = \frac{r_3 - r_1}{r_3 + r_1} \quad \text{és} \quad \sin O_2O_1G = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}$$

képletek szolgáltatják. Teljesen azonos eljárással határozhatjuk meg a B és C szöget is.

A megadott számértékeket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$T = 1467,5 \text{ mm}^2.$$

(Riesz Kornél, Budapest.)

A feladatot még megoldották: Deutsch I., Enyedi B., Haar A., Pivnyik I., Prékopa D., Riesz K., Riesz M.