Az adott egyenlet discriminánsa:

$$D=16(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+a^2c^2-a^2bc-ab^2c-abc^2),$$

vagy, ha egyszerűség kedvéért az

$$ab=\gamma,\ bc=\alpha,\ ca=\beta \tag{1}$$

értékeket helyettesítjük:

$$D=16(\gamma^2+\alpha^2+\beta^2-\beta\gamma-\alpha\gamma-\alpha\beta).$$

Hogy ez a kifejezés mindig positív, s így a gyökök valósak, kitűnik, ha az

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta>0$$

$$\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma>0$$

$$\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma>0$$

egyenlőtlenségeket összeadjuk és a két oldal 8-szorosát vesszük.

Ha $b=c$, akkor (1) szerint egyszersmind $\beta=\gamma$; ezt D-be helyettesítve, nyerjük, hogy

$$D=16(\alpha-\beta)^2$$

D tehát teljes négyzet és a gyökök racionálisak.

Legyen most $bc=ab+ac-a^2$. Szorozzuk meg az (1) alatti első és harmadik egyenletet és osszuk el bc-vel a két oldalt, akkor nyerjük, hogy $a^2=\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$; ezt és az (1) alatti egyenleteket helyettesítve ez az egyenlet így alakul:

$$\alpha=\beta+\gamma-\frac{\beta\gamma}{\alpha},$$

vagyis

$$\alpha^2=\alpha\beta+\alpha\gamma-\beta\gamma;$$

α^2 ezen értékét D-be helyettesítve:

$$D=16(\beta-\gamma)^2.$$

A gyökök ez esetben tehát szintén raczionálisak.

(Kőnig Dénes, Budapest.)

A feladatot még megoldották: Bartók I., Deutsch I., Enyedi B., Haar A., Hirschfeld Gy., Kertész G., Messer P., Moskovits Zs., Pivnyik I., Riesz K., Riesz M., Söpkéz Gy., Szücs A., Weisz P.