Oldjuk meg az egyenletet z-re nézve; lesz:

$$z = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+4y^2-4}}{2}.$$

Az egyenlet gyökei akkor valósak és külömbözők, egyenlők, illetőleg komplexek, ha

$$x^2+4y^2-4 \gtreqless 0.$$

Az $x^2+4y^2-4=0$ oly ellipsis egyenlete, melynek középpontja a coordináta-rendszer kezdőpontja, melynek nagy tengelye 4 egység, kis tengelye 2 egység

(a) A gyökök valósak és külömbözők, ha

$$x^2+4y^2-4>0$$

vagy más alakban

$$\frac{x^2}{4}+y^2>1.$$

Az eme egyenlőtlenséget kielégítő pontok mind az ellipsisen kívül vannak.

(b) A gyökök egyenlők, ha

$$x^2+4y^2-4=0.$$

Ez esetben a megfelelő pontok mértani helye az ellipsis kerülete.

(c) A gyökök complexek, ha

$$x^2+4y^2-4<0.$$

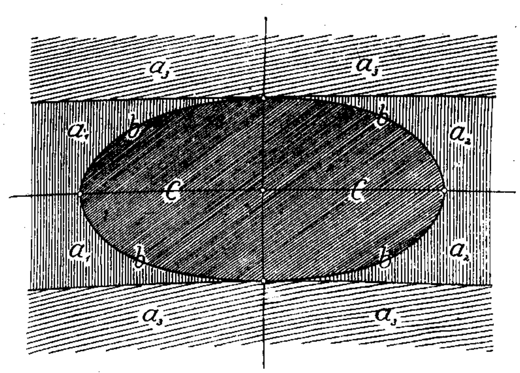
Ezen esetben x és y mindama pontok coordinátáit jelentik, mely pontok az ellipsisen belül vannak.

Az (a) regióba tartozó mértani helyek a következőképpen csoportosíthatók:

(a_1) Mindkét gyök positív, ha

$$z_1+z_2=-x>0 \text{ és } z_1z_2=1-y^2>0$$

$-x$ akkor >0, ha negatív; $1-y^2>0$, ha absolut értéke kisebb 1-nél, vagyis ha $-1<y<1$. A megfelelő pontok tehát az $y=1$ és $y=-1$ egyenletek által meghatározott egyenesek között az ordináta tengelytől balra vannak, mint azt ábránk mutatja.



(a_2) Mindkét gyök negatív, ha

$$z_1+z_2=-x<0$$

és

$$z_1z_1=1-y^2>0.$$

$-x<0$, ha $-1<y<1$. Vagyis a megfelelő pontok az $y=1$ és $y=-1$ egyenesek között, de az ordináta tengelytől jobbra vannak.

(a_3) Ha a két gyök ellenkező előjelű, akkor a gyökök összege positív vagy negatív, a gyökök szorzata pedig negatív, akkor tehát

$$z_1+z_2=-x \gtrless 0, \;\; z_1z_2=1-y^2<0.$$

A megfelelő pontok abscissái negatívok vagy positívok, ordinátái pedig vagy nagyobbak egynél, vagy kisebbek -1-nél. Eme pontok tehat az $y=1$ egyenes fölött és az $y=-1$ egyenes alatt vannak.

(Enyedi Béla. Budapest.)

A feladatot még megoldották: Bartók I., Haar A., Kőnig D., Pintér M., Pivnyik I., Schmidl I., Tóbiás L., Wohlstein S.