Segédtétel: Két 0-tól és egymástól különböző α és β egész szám négyzetének különbsége 3 és -3 között nem lehet.

Bizonyítás. Minthogy

$$(-\alpha)^2-(-\beta)^2=(-\alpha)^2-\beta^2=\alpha^2-(-\beta)^2=\alpha^2-\beta^2,$$

azért tételünket elégséges positív α és β számok esetén kimutatni.

1°. Legyen $\alpha>\beta$, akkor

$$\alpha=\beta+\beta',$$

a hol β' 0-tól különböző positív egész szám. Ekkor:

$$\alpha^2-\beta^2=(\beta+\beta')^2-\beta^2=2\beta\beta'+\beta'^2$$

az $\alpha^2-\beta^2$ tehát legkisebb, ha β és β' a legkisebb positív egész számmal, azaz 1-gyel egyenlők, mikor is

$$\alpha^2-\beta^2=3.$$

2°. Ha $\alpha<\beta$, akkor

$$(\alpha^2-\beta^2)_{max}=-(\beta^2-\alpha)^2)_{min}=-3.$$

I. Legyen a és b legnagyobb közös osztója d, tehát:

$$a=\alpha d \textit{ és } b=\beta d,$$

a hol α és β relativ prímszámok, akkor:

$$\text{(I.)}\qquad \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$$

Ha (I.) egész szám, akkor az 1-gyel nagyobb, illetőleg kisebb

$$\text{(II.)}\qquad \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}+1=\frac{2\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}\text{ és }\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}-1=\frac{2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

számok is egészek, vagyis $2\alpha^2$ is, meg $2\beta^2$ is osztható $(\alpha^2-\beta^2)$-tel. De α és β és velük együtt α^2 és β^2 is relatív prímszámok, tehát (II.)) számok csak akkor lehetnének egészek, ha 2 többszöröse lenne $(\alpha^2-\beta^2)$-nek, a mi pedig segédtételünk értelmében, egymástól és 0-tól különböző a és b egész számok esetében, lehetetlen. Tehát a (II.) és velük együtt az (I.) szám sem lehet egész.

(Kőnig Dénes, Budapest.)

A feladatot még megoldotta: Pintér Miksa.

(Mindkét megoldó a segédtételt csak felhasználja, de nem bizonyítja).