Kimutatjuk, hogy $(n,\ d_1)(n_1,\ d_2)$ szorzatot különböző törzsszámok hatványainak szorzatára bontva, csupa oly hatványokat nyerünk, melyek $n(n,\ d_1+d_2)$-nek osztói. Ha ezt kimutattuk, akkor, minthogy e hatványok egymás közt mind relatív prímek, kitűnik, hogy szorzatuk: $(n,\ d_1)(n,\ d_2)$ is osztója lesz $n(n,\ d_1+d_2)$-nek. Akkor pedig:

$$n(n,\ d_1+d_2) \geqq (n,\ d_1)(n,\ d_2)$$

a miből következik, hogy

$$\frac{(n,\ d_1+d_2)}{(n,\ d_1)(n,\ d_2)} \geqq \frac{1}{n}.$$

Hogy a fenti tételt bebizonyíthassuk, bontsuk fel $(n,\ d_1)$-et, $(n,\ d_2)$-t törzstényezőkre, akkor lesz:

$$(n,\ d_1) = p_1^{a_1} p_2^{a_2}\ \dots q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots,$$

$$(n,\ d_2) = p_1^{c_1} p_2^{c_2}\ \dots r_1^{d_1} r_2^{d_2} \dots,$$

hol $p_1,\ p_2,\ \dots\ q_1,\ q_2,\ \dots\ r_1,\ r_2,\ \dots$ prímszámok és $p_1,\ p_2,\ \dots$ mindkét számban, de nem okvetlenül ugyanazon a hatványon fordul elő. Legyen $a_1 > c_1$; $p_1^{c_1}$; akkor mindkét számot, tehát n-et, d_1-et, és d_2-t is osztja s így (d_1+d_2)-t, tehát $(n,\ d_1+d_2)$-t is; $p_1^{a_1}$ pedig osztja $(n,\ d_1)$-t, tehát n-t is. $p_1^{a_1} p_1^{c_1} = p_1^{a_1+c_1}$, tehát osztója $n\cdot(n,\ d_1+d_2)$-nek. Éppúgy kimutathatjuk ezt $p_2^{a_2+c_2},\ \dots$-ről is. A $q_1^{b_1},\ q_2^{b_2},\ \dots,\ r_1^{d_1} r_2^{d_2},\ \dots$ számok egymás közt relatív prímek s így, minthogy valamennyi n osztója, szorzatuk is n-nek s így $n\cdot(n,\ d_1+d_2)$-nek is osztója lesz. De e számok $p_2^{a_1+c_1},\ p_2^{a_2+c_2},\ \dots$-vel is relatív prímek, s így $n\cdot(n,\ d_1+d_2),\ p_1^{a_1+c_1},\ p_2^{a_2+c_2},\ \dots q_1^{b_1},\ q_2^{b_2},\ \dots,\ r_1^{d_1} r_2^{d_2},\ \dots$-vel, azaz $(n,\ d_1)(n,\ d_2)$-vel is osztható. Ezzel tételünk be van bizonyítva.

(König Dénes, Budapest.)

A feladatot még megoldották: Aczél F., Bartók I., Bayer B., Bogdán G., Dessauer A., Haar A., Kertész F., Lázár L., Ligeti P., Póka Gy., Raab R., Sasvári J., Schlesinger A., Schmidl I., Schwarz Gy., Selényi M., Szalonnay A., Szmodics H., Szmodics K., Tóbiás L., Wohlstein S.