

A térbeli háromszög oldalait a_0 , b_0 , c_0 -t, ha r_0 a körülírt kör sugara a következő egyenletekből számíthatjuk ki:

$$(1) \quad \begin{aligned} a_0 &= 2r_0 \sin \alpha_0 \\ b_0 &= 2r_0 \sin \beta_0 \\ c_0 &= 2r_0 \sin \gamma_0 \end{aligned}$$

Ha pedig a projiciált háromszög oldalai a_1 , b_1 , c_1 és a körülírt kör sugara r_1 akkor:

$$(2) \quad \begin{aligned} a_1 &= 2r_1 \sin \alpha_1 \\ b_1 &= 2r_1 \sin \beta_1 \\ c_1 &= 2r_1 \sin \gamma_1. \end{aligned}$$

Már most az a_0 , b_0 , c_0 oldalak hajlásszögei α' , β' , γ' -re nézve:

$$(3) \quad \begin{aligned} \cos \alpha' &= \frac{a_1}{a_0} = \frac{r_1 \sin \alpha_1}{r_0 \sin \alpha_0} \\ \cos \beta' &= \frac{b_1}{b_0} = \frac{r_1 \sin \beta_1}{r_0 \sin \beta_0} \\ \cos \gamma' &= \frac{c_1}{c_0} = \frac{r_1 \sin \gamma_1}{r_0 \sin \gamma_0}. \end{aligned}$$

Hogy tehát a hajlásszögek meg legyenek határozva, csak az $\frac{r_1}{r_0} = x$ hányados értékét kell ismernünk.

Kiindulunk a következő összefüggésből:

$$(4) \quad \sqrt{a_0^2 - a_1^2} + \sqrt{b_0^2 - b_1^2} = \sqrt{c_0^2 - c_1^2},$$

a melyből az (1) és (2)-öt tekintetbe véve:

$$\sqrt{r_0^2 \sin^2 \alpha_0 - r_1^2 \sin^2 \alpha_1} + \sqrt{r_0^2 \sin^2 \beta_0 - r_1^2 \sin^2 \beta_1} = \sqrt{r_0^2 \sin^2 \gamma_0 - r_1^2 \sin^2 \gamma_1}$$

vagy r_0 -val minden tagot osztva:

$$\sqrt{\sin^2 \alpha_0 - x^2 \sin^2 \alpha_1} + \sqrt{\sin^2 \beta_0 - x^2 \sin^2 \beta_1} = \sqrt{\sin^2 \gamma_0 - x^2 \sin^2 \gamma_1}.$$

Egyszerűség okából írjunk az x^2 helyébe y -t; $\sin^2 \alpha_0$, $\sin^2 \beta_0$, $\sin^2 \gamma_0$ helyébe a , b , c -t és $\sin^2 \alpha_1$, $\sin^2 \beta_1$, $\sin^2 \gamma_1$ helyébe α , β , γ -t, akkor az utolsó egyenletből kétszeri négyzetelés után nyerjük, hogy:

$$\begin{aligned} &y^2[2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)] + 2y[(a\alpha + b\beta + c\gamma) - \\ &-(a + b + c)(\alpha + \beta + \gamma)] + [2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)] = 0. \end{aligned}$$

Ha pedig

$$\alpha + \beta + \gamma = \sigma; \quad \beta + \gamma - \alpha = \sigma_1; \quad \alpha - \beta + \gamma = \sigma_2; \quad \alpha + \beta - \gamma = \sigma_3$$

és

$$a + b + c = s; \quad b + c - a = s_1; \quad a - b + c = s_2; \quad a + b - c = s_3,$$

akkor:

$$y^2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + y(s_1\sigma_1 + s_2\sigma_2 + s_3\sigma_3 - s\sigma) + (s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1) = 0;$$

a honnan y és evvel együtt x is kiszámítható, mi által a feladat megoldottnak tekinthető.