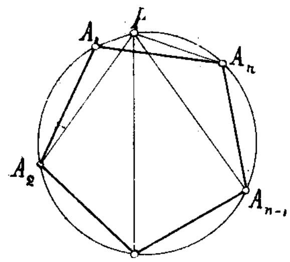
Jelöljük PA_1A_2 háromszög területét t_1-gyel, a $PA_2A_3\Delta$-ét t_2-vel, $PA_{n-1}A_n\Delta$-ét t_{n-1}-gyel, $PA_nA_1\Delta$-ét t_n-nel, hol e területek, minthogy a P-nél fekvő szögek α-val egyenlők,

$$t_1 = \frac{1}{2}\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}\sin\alpha,\ t_2 = \frac{1}{2}\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_3}\sin\alpha,$$
$$t_{n-1} = \frac{1}{2}\overline{PA_{n-1}}\cdot\overline{PA_n}\sin\alpha \text{ és } t_n = \frac{1}{2}\overline{PA_n}\cdot\overline{PA_1}\sin\alpha.$$



Carnot tétele alapján:
$PA_1A_2\Delta$-ből:

$$\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2^2} = \overline{A_1A_2}^2 + 2\overline{PA_1PA_2}\cos\alpha$$

$PA_2A_3\Delta$-ből:

$$\overline{PA_2}^2 + \overline{PA_3}^2 = \overline{A_2A_3}^2 + 2\overline{PA_2PA_3}\cos\alpha$$

$$\dots$$

$PA_{n-1}A_n\Delta$-ből:

$$\overline{PA_{n-1}}^2 + \overline{PA_n}^2 = \overline{A_{n-1}A_n}^2 + 2\overline{PA_{n-1}PA_n}\cos\alpha.$$

$PA_nA_1\Delta$-ből:

$$\overline{PA_n}^2 + \overline{PA_1}^2 = \overline{A_nA_1}^2 - 2\overline{PA_nPA_1}\cos\alpha.$$

Eme egyenlőségeket összeadva :

$$2\left(\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 + \dots + \overline{PA_n}^2\right) = n\overline{A_1A_2}^2 + 2\cos\alpha(\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2} + \overline{PA_2}\cdot\overline{PA_3} + \dots + \overline{PA}_{n-1}\overline{PA}_n - \overline{PA}_n\overline{PA}_1)$$

$$2\left(\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 + \dots + \overline{PA_n}^2\right) =$$
$$n\overline{A_1A_2}^2 + + \frac{4\cos\alpha}{\sin\alpha}(\frac{1}{2}\overline{PA_1PA_2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\overline{PA_2PA_3}\sin\alpha + \dots + \frac{1}{2}\overline{PA}_{n-1}\overline{PA}_n\sin\alpha - \frac{1}{2}\overline{PA}_n\overline{PA}_1\sin\alpha)$$
$$2\left(\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 + \dots + \overline{PA_n}^2\right) = n\overline{A_1A_2}^2 + 4\mathrm{ctg}\alpha(t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} - t_n).$$

De $t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} - t_n = T_n$ a szabályos sokszög területével. Tehát

$$\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 + \dots + \overline{PA_n}^2 = \frac{1}{2}(n\overline{A_1A_2}^2 + 4\mathrm{ctg}\alpha T_n) = \mathrm{const.}$$

(Bayer Béla, Losoncz.)

Jegyzet. Ha a köré írható kör sugara r, a sokszög egy oldala

$$A_1A_2 = 2r\sin\alpha$$

és területe

$$T_n = n\frac{\overline{A_1A_2}^2}{4\mathrm{tg}\alpha} = nr^2\sin^2\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha \text{ és } 4\mathrm{ctg}\alpha T_n = 4nr^2\cos^2\alpha,$$

akkor

$$\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 + \dots + \overline{PA_n}^2 = \frac{1}{2}[4nr^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)] = 2nr^2.$$

Ha n páros, a bizonyítás egyszerűbb. Ugyanis megrajzolva P diametrál pontját, P_1-et

$$\overline{PA_1}^2 + \overline{P_1A_1}^2 = 4r^2$$

$$\overline{PA_2}^2 + \overline{P_1A_2}^2 = 4r^2$$

$$\dots$$

$$\left(\overline{PA_1}^2+\overline{PA_2}^2+\dots\overline{PA_n}^2\right)+\left(\overline{P_1A_1}^2+\overline{P_1A_2}^2+\dots\overline{P_1A_n}^2\right)=4nr^2.$$

De

$$PA_1=P_1A_{\frac{n}{2}+1},\ PA_2=P_1A_{\frac{n}{2}+2},\ \dots,PA_n=P_1A_{\frac{n}{2}}$$

és így a bal oldalon álló két összeadandó egyenlő lévén

$$\overline{PA_1}^2+\overline{PA_2}^2+\dots\overline{PA_n}^2=2nr^2.$$

A feladatot még megoldották: Bartók I., Kertész F. , König D., Lázár L., Messik G., Lukhaub Gy., Sasvári J., Tóbiás L., Wohlstein S.