I. *megoldás.* Jelöljük a négy színt az a, b, c és d betűkkel, a négy figurát az 1, 2, 3 és 4 indexekkel. Akkor a kártyáknak egy megfelelő elhelyezése a következő:

$$\begin{matrix} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 \\ b_3 & a_4 & d_1 & c_2 \\ c_4 & d_3 & a_2 & b_1 \\ d_2 & c_1 & b_4 & a_3 \end{matrix}$$

Ha az oszlopokat egymásközt permutáljuk 4! – a követelményeknek megfelelő – elhelyezést kapunk; de eme elhelyezések mindegyikében a sorok is permutálhatók egymásközt, úgy hogy $4! \times 4! = 576$ külömböző elhelyezésünk lesz. Az eddigi összes elhelyezésekben az egyes oszlopokban és sorokban *ugyanazon* kártyák – vagy elemek – fordulnak elő; tehát pl. az a_1, b_2, c_3, d_4 mindig egy sorban, az a_1, b_3, c_4, d_2 mindig egy oszlopban fordul elő. De nyilvánvaló, hogy a b_2 helyébe b_3 és b_4 is tehető, a c_3 helyébe pedig c_4. Így tehát az eredeti elhelyezések száma – permutálás nélkül – $3 \times 2 = 6$, s mi után az első oszlopban b_3 helyett b_4 is állhat, azért az eredeti elhelyezések száma $6 \times 2 = 12$. Eme elhelyezések mindegyikében a fentebb említett módon az oszlopokat és sorokat permutálva, az összes lehetséges elhelyezések száma

$$4! \times 4! \times 12 = 576 \times 12 = 6912.$$

(Lukhaub Gyula, Szeged.)

II. *megoldás.* A feladatnak megfelelően kell, hogy az első sorban egy a, egy b, egy c és egy d legyen. Az a-nál kezdve, a 4-féle a közül bármelyiket vehetjük, de ekkor a b-k közül, minthogy ezeknek más indexűeknek kell lenniök, már csak 3-at, a c-k közül 2-t és a d-k közül csak egyet vehetünk. Az első *sorban* tehát $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$-féle négy kártya lehet és ugyanazon kártya sorrendje 4!-féleképp lévén változtatható, az első sor $4!4! = (4!)^2$-féleképp rakható fel, mely sorok teljesen egyforma szerepűek s így a további tárgyalást elég egy esetre folytatni, ha pld. az első sor négy tagja rendre: a_1, b_2, c_3, d_4. Tekintsük most az első *oszlopot*; a oda már az a_1-en kívül nem kerülhet a b-k közül már csak (1) b_3 vagy (2) b_4 kerülhet oda. (1) esetben a c-k közül a harmadik helyre juthat c_2, s így negyediknek d_4 vagy harmadiknak c_4, tehát negyediknek d_2, az előbbi eset azonban lehetetlen, mert d_4-et már az első sorba raktuk s így csak az utóbbi lehetséges; (2) esetben a c-k közül csak c_2 juthat oda s így a negyedik d_3, mely a második lehetséges eset. Ha tehát az első sor állandó, az első oszlopban a többi három kártyát, a sorrendet nem tekintve, csak kétféleképp lehet felrakni, vagy ennek tekintetbe vételével (3 kártya sorrendje 3!-féleképp lévén változtatható) $2 \cdot 3!$-féleképp.

Ezek után kimutatható, hogy az első sor és oszlop (ha t. i. ezeket a feladatnak megfelelően rendeztük el) *meghatároz egy és csak egy megoldást.* Ennélfogva a megoldások száma akkora, ahányféleképp az első sort és első oszlopot elrendezhetjük. De láttuk, hogy az első sor $(4!)^2$-féleképpen rakható fel, az első oszlop pedjg $2 \times 3!$-féleképp, s így a megoldások száma

$$(4!)^2 \times 2 \times 3! = 4! \times 1! \times 2! \times 3! \times 4! = 6912.$$

(König Dénes, Budapest.)

Jegyzet. Ha feladatunkhoz még ama feltételt kapcsoljuk, hogy az átlók irányában sem fordulhat elő ugyanazon figura és ugyanazon szín kétszer, akkor a megoldások száma $576 \times 2 = 1152$. Az egyik átló irányában ugyanis 8212; úgy mint előbb az elsősorban 8212; az elhelyezések száma ismét 576. Legyen pl. egy elhelyezés az átló irányában $a_1b_2c_3d_4$. Könnyen kimutatható, hogy eme elhelyezésnél a 7. helyre is csak a_4, vagy d_1 kerülhet s mindegyik esetben a kártyáknak *csakis* egy elhelyezése lehetséges. Az 576 eset mindegyikében tehát két elhelyezés lehetséges, s így összesen 2×576 elhelyezést kapunk. Pl.

$$\begin{matrix} a_1 & d_3 & b_4 & c_2 \\ c_4 & b_2 & d_1 & a_3 \\ d_2 & a_4 & c_3 & b_1 \\ b_3 & c_1 & a_2 & d_4 \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} a_1 & c_4 & d_2 & b_3 \\ d_3 & b_2 & a_4 & c_1 \\ b_4 & d_1 & c_3 & a_2 \\ c_2 & a_3 & b_1 & d_4 \end{matrix}$$

Látjuk, hogy eme elhelyezésekben az oszlopok és sorok fel vannak cserélve.

Érdekes tulajdonsága eme elhelyezéseknek, hogy *bűvös négyzetekre* jutunk (K. M. L. VI. 64. l. és VII. 3. l.), ha a betűket az egymásra következő számokkal helyettesítjük. Ha tehát $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $b_1 = 5$, $b_2 = 6$, $b_3 = 7$, $b_4 = 8$, $c_1 = 9$, $c_2 = 10$, $c_3 = 11$, $c_4 = 12$, $d_1 = 13$, $d_2 = 14$, $d_3 = 15$, $d_4 = 16$, akkor a fentebbi elhelyezésekből a következő bűvös négyzeteket kapjuk:

1	15	8	10
12	6	13	3
14	4	11	5
7	9	2	16

1	12	14	7
15	6	4	9
8	13	11	2
10	3	5	16

Látjuk, hogy minden sorban és minden oszlopban, valamint az átlók irányában is a számok összege 34.

(Rátz Károly, Bécs.)

A feladatot még megoldotta: Bayer Béla.