E görbe is simmetrikus az ordináta tengelyre nézve, mert a függvényben x-nek csak páros hatványai fordulnak elő.

A megadott függvény még így is írható:

$$y = \frac{1 - \frac{16}{x^4}}{1 - \frac{10}{x^2} + \frac{9}{x^4}}.$$

Látjuk, hogy $y = 1$, ha $x = \pm\infty$; ha pedig

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0,$$

vagyis, ha x értéke $\pm 3,\ \pm 1$, akkor $y = \infty$. Ha pedig

$$x^4 - 16 = 0,$$

azaz, ha $x = \pm 2$, akkor $y = 0$.

Vizsgáljuk meg, hogy a függvénynek van-e minimuma, vagy maximuma? E végből a megadott kifejezést így írhatjuk:

$$(1 - y)x^4 + 10x^2 y - 16 - 9y = 0. \tag{1}$$

Ha eme egyenletet x^2-re nézve megoldjuk, akkor a discriminans:

$$25y^2 + (1 - y)(16 + 9y) = 16y^2 - 7y + 16 = \left(4y - \frac{7}{8}\right)^2 + 15\frac{15}{64}.$$

Látjuk, hogy eme kifejezés y-nak minden értéke mellett positív s így x^2 mindig valós; de kimutathatjuk azt is, hogy y-nak minden értéke mellett x^2-nek legalább is egyik értéke positív.

(1)-ből láthatjuk, hogy x^2 két értékének szorzata

$$\frac{16 + 9y}{y - 1}, \tag{3}$$

a két érték összege pedig

$$\frac{10y}{1 - y}. \tag{4}$$

A (3) alatti kifejezés positív, ha $y > 1$, vagy $y < -\frac{16}{9}$, mert első esetben a számláló és nevező positív, második esetben mindkettő negatív.

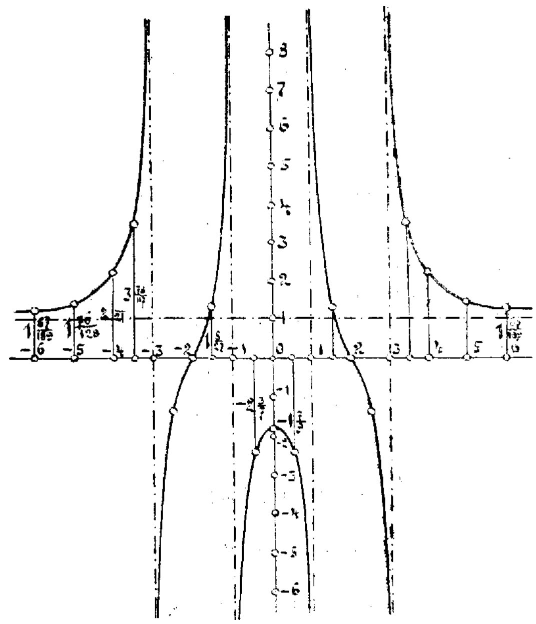
(4)-ből azonban látjuk, hogy a tört értéke mindkét esetben negatív s így x^2 mindkét értéke positív; a megjelölt határokban tehát minden y-nak 4 valós x felel meg.

A (3) alatti kifejezés negatív, ha $y < 1$, de nagyobb mint $y < -\frac{16}{9}$; ez esetben x^2-nek csak egyik értéke positív, tehát e határok között minden y-hoz csak két valós x tartozik. Ha tehát az abscissa tengellyel párhuzamost rajzolunk, mely $y < -\frac{16}{9}$ és 1 között van, akkor az a görbét 2 pontban metszi; minden más egyenes, mely az abscissa tengellyel párhuzamos pedig 4 pontban metszi a görbét.

A változóknak egymáshoz tartozó értékei:

x	$-\infty,$	$\ldots -5,$	$-4,$	$-3,$	$-2,$	$-1{,}5,$	$-1,$	$-\frac{1}{2},$	$0,$	$\frac{1}{2},$	$1,$	$\ldots +\infty$
y	$1,$	$\ldots 1\frac{75}{128},$	$2\frac{2}{7},$	$\pm\infty,$	$0,$	$1\frac{8}{27},$	$\pm\infty,$	$-2\frac{3}{7},$	$-\frac{16}{9},$	$-2\frac{3}{7},$	$\pm\infty$	1

E táblázat mutatja, hogy a függvény értéke 1, ha $x = -\infty$; tehát az $y = 1$ egyenes asymptotája a görbének. Ha x, -3-ig nő, y nő $+\infty$-ig, innen átugrik $-\infty$-be; tehát $x = -3$ egyenes asymptotája a görbének. Ha x tovább nő -1-ig, y nő $+\infty$-ig, y tovább nő $+\infty$-ig, azután ismét átugrik $-\infty$-be, tehát az $x = -1$ egyenes szintén asymptota. Ha x, 0-ig nő, a görbe $-\frac{16}{9}$-ig nő. Innen kezdve a függvény változása ismétlődik, mert a görbe az ordináta tengelyre nézve simmetrikus.



(Póka Gyula, Losoncz.)

A feladatot még megoldották: Bayer B., Benedek Zs., Czank K., Faith F., Filkorn J., Hirschfeld Gy., Holzmann J.M., Kerekes T., Krausz B., Krisztián Gy., Kürth A., Lichtig A., Lukhaub Gy., Lupsa Gy., Sasvári G., Scharff J., Smodics K., Sümegi Gy., Wohlstein S.