1°. Legyen a derékszögű négyszög $A_1A_2A_3A_4$ és a másik négyszög $B_1B_2B_3B_4$, úgy, hogy $B_1B_3 \perp A_1A_3$ és $B_2B_4 \perp A_2A_4$.

$B_1B_2,\ B_2B_3,\ B_3B_4$ és $B_4B_1,\ A_1A_2$-t $C_1\ D_1,\ E_1$ és F_1 pontokban metszik, A_2A_3-t $F_2,\ E_2,\ D_2$ és C_2 pontokban, A_3A_4-t $E_3,\ F_3,\ C_3$ és D_3 pontokban s végre A_4A_1-t $D_4,\ C_4,\ F_4$ és E_4 pontokban.

$B_2A_3,\ A_1A_2$-t G_1-ben A_4A_1-t G_4-ben és $A_1B_4,\ A_2A_3$-t G_2-ben és A_3A_4-t G_3-ban metszi.

A $B_1B_2B_4A_3$ húrnégyszögben:

$$B_1B_2A_3\sphericalangle = B_1B_4A_3\sphericalangle = \alpha;$$

minthogy pedig

$$\widehat{B_1A_3} = \widehat{A_3B_3},$$

azért

$$B_1B_2A_3\sphericalangle = A_3B_2B_3\sphericalangle = \alpha$$

és

$$B_1B_4A_3\sphericalangle = A_3B_4C_3\sphericalangle = \alpha$$

Hasonlóan

$$A_1B_2B_3\sphericalangle = A_1B_2C_1\sphericalangle = \beta,$$

és

$$A_1B_4B_3\sphericalangle = A_1B_4B_1\sphericalangle = \beta.$$

Így tehát $C_4,\ D_4,\ A_1$ és G_4 pontok harmonikus pontok, mert a $C_4B_2D_4$ háromszög B_2C_4 és B_2D_4 oldalainak és a B_2A_1 és B_2G_4 belső s külső szögfelezőknek a talppontjait képezik.

Hasonlóan $C_2,\ D_2,\ G_2$ és A_3 pontok szintén harmonikus pontok s mivel az egyes szeletek fölött is ugyanakkora szögek feküsznek, mint az előbbi háromszögnél s minthogy továbbá az A_1A_4, és A_2A_3 hordozók párhuzamosak, azért e pontsorok perspectivikusak is, vagyis:

$$(C_4D_4A_1G_4) = (C_2D_2A_3G_2).$$

De

$$(C_4D_4A_1G_4) = (D_1C_1A_1G_1)$$

és

$$(C_2D_2A_3G_2) = (D_3C_3A_3G_3),$$

mert A_1, ill. A_3 pontjuk közös és a megfelelő pontokat összekötő egyenesek egy-egy pontban jönnek össze. Ebből pedig az következik, hogy mind a négy harmonikus pontsor perspectivikus helyzetű s így $4-4$ megfelelő pont $C_1,\ C_2,\ C_3$ és $C_4;\ D_1,\ D_2,\ D_3$ és D_4 egy-egy egyenesen fekszik.

Hasonlóan bizonyítjuk, hogy $E_1,\ E_2,\ E_3$ és $E_4;\ F_1,\ F_2,\ F_3$ és F_4 pontok szintén egy-egy egyenesen vannak.

2°. A feladat első részéből folyik, hogy a $\overline{C_1C_4},\ \overline{D_1D_4},\ \overline{A_1B_4}$ és $\overline{A_3B_2}$ egyenesek, mint perspectivikus pontsorok megfelelő pontjait összekötő sugarak egy ugyanazon A pontban metszik egymást. Hasonlóképpen $\overline{E_1E_4},\ \overline{F_1F_4},\ \overline{A_1B_2}$ és $\overline{A_3B_4}$ egyenesek szintén egy pontban (Y) találkoznak.

Jelöljük az $A_1B_2A_3B_4$ húrnégyszög A_1A_3 és B_2B_4 átlóinak metszéspontját Z-vel.

A teljes négyszög elméletéből tudjuk, hogy XYZ háromszög az $A_1B_2A_3B_4$ négyszög diagonálháromszöge, a melynek azon fontos tulajdonsága van, hogy bármelyik csúcsának polárisa a szemközt fekvő oldal. Így tehát X pont polárisa tényleg átmegy Y ponton, vagyis az E_1E_4 és F_1F_4, egyenesek metszéspontján, Y pont polárisa pedig keresztülmegy X ponton, vagyis az C_1C_4 és D_1D_4 egyenesek metszéspontján.

Hasonlóképpen bizonyítjuk a többi esetet is.

(Krisztián György, Pécs.)

A feladatot még megoldották: Krausz B., Luckhaub Gy., Sasvári G.