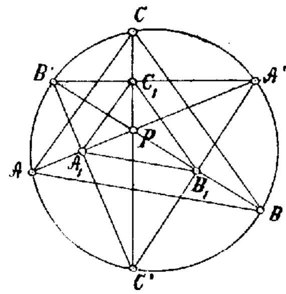
(1°) Az ABC háromszög belső szögfelezői P pontban metszik egymást.



Az ábra mutatja, hogy

$$A'C'C\sphericalangle + CC'B'\sphericalangle + BB'C'\sphericalangle = A'AC\sphericalangle + CBB'\sphericalangle + BCC'\sphericalangle =$$

$$= \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ$$

s így

$$C'B_1B'\sphericalangle = 90^\circ.$$

Minthogy továbbá

$$BC'A'\sphericalangle = BAA'\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} = A'AC\sphericalangle = A'C'C\sphericalangle,$$

azért

$$BB_1 = PB_1,$$

vagyis

$$PB = 2PB_1;$$

hasonlóképp

$$PA = 2PA_1 \quad \text{és} \quad PC = 2PC_1.$$

Minthogy tehát az $A_1,\ B_1,\ C_1$ pontok az $AP,\ BP,\ CP$ távolságokat ugyanazon arányban osztják, azért $AB : BC : CA = A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1$ s így $ABC\triangle \sim A_1B_1C_1\triangle$. Ennélfogva

$$K = AB + AC + BC = 2A_1B_1 + 2A_1C_1 + 2B_1C_1 = 2K_1,$$

miből

$$K_1 = \frac{1}{2}K.$$

Hasonlóképp:

$$K_2 = \frac{1}{2}K_1, \quad K_3 = \frac{1}{2}K_2, \quad \dots$$

s így az $ABC,\ A_1B_1C_1,\ A_2B_2C_2,\dots$ háromszögek kerületeinek összege:

$$S_1 = \frac{K}{1-\frac{1}{2}} = 2K.$$

Minthogy továbbá

$$T : T_1 = \overline{AB}^2 : \overline{A_1B_1}^2 = 4\overline{A_1B_1}^2 : \overline{A_1B_1}^2 = 4 : 1,$$

azért

$$T_1 = \frac{1}{4}T,$$

hasonlóképp

$$T_2 = \frac{1}{4}T_1, \quad T_3 = \frac{1}{4}T_2, \quad \dots$$

a miért is az említett háromszögek területeinek összege:

$$S_2 = \frac{T}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}T.$$

(2°) A 275. feladat alapján (K.M.L.IV.100.l.)

$$T = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

ennélfogva

$$T' = 2R^2 \sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma) sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) =$$

$$= 2R^2 \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

s így

$$\frac{T}{T'} = \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

$$= 8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

(3°)

$$r : r' = \frac{T}{s} : \frac{T'}{s'} = \frac{\frac{abc}{4R}}{a+b+c} : \frac{\frac{a'b'c'}{4R}}{a'+b'+c'} =$$

$$= abc(a'+b'+c') : a'b'c'(a+b+c).$$

(Filkorn Jenő, Nyitra.)

A feladatot még megoldották: Bertrám J., Czank K., Freibauer E., Krausz B., Krisztián Gy., Lukhaub Gy., Lupsa Gy., Messik G., Messik V., Oltay K., Sasvári G., Szabó J.