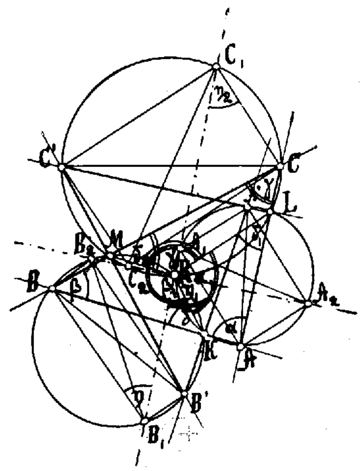
I. Megoldás. 1°. Rajzoljunk a feladatban megnevezett derékszögű négyszögek köré köröket.



1. ábra

Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy e körök egy közös R pontban metszik egymást; ugyanis – miután a félkörben fekvő szög derékszög – a K, L és M pontok is a körökön fekszenek s így az $AKRL$ és $BKRM$ húrnégyszögekből $\alpha_1 = 2R - \alpha$; $\beta_1 = 2R - \beta$, tehát $\gamma_1 = 4R - \alpha_1 - \beta_1 = \alpha + \beta$; ennélfogva

$$\gamma + \gamma_1 = \alpha + \beta + \gamma = 2R,$$

mely egyenlet annak a feltétele, hogy a $CLRM$ négyszög is húrnégyszög, a miért is a három kör csakugyan R pontban metszi egymást.

Ugyancsak a fent említett húrnégyszögekből következik, hogy

$$(1) \qquad \delta = \delta_1 = \delta_2$$

s miután

$$(2) \qquad \eta = \delta, \ \eta_1 = \delta_1 \text{ és } \eta_2 = \delta_2$$

mint ugyanazon íven fekvő kerületi szögek, azért az (1) és (2)-ből közvetlenül látható, hogy:

$$\eta = \eta_1 = \eta_2.$$

Ha még figyelembe vesszük, hogy $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, akkor világos, hogy az η, η_1 és η_2 szögek váltó, illetve megfelelő szögek s így az A_1, B_1 és C_1 pontok egy az R ponton átmenő egyenesen fekszenek.

2°. Az A_1A_2, B_1B_2 és C_1C_2 átlók egyszersmind a megfelelő körök átmérői, minélfogva:

$$A_1RA_2\sphericalangle = B_1RB_2\sphericalangle = C_1RC_2\sphericalangle = 90^\circ,$$

a miből folyólag az A_2, B_2 és C_2 pontok is egy az R ponton átmenő és az $A_1B_1C_1$ egyenesre merőlegesen álló egyenesen vannak.

(Devecis del Vecchio Mihály, műegyetemi hallgató, Budapest.)

II. Megoldás. Ha $AB \perp A'B'$, $BC \perp B'C'$ és $AC \perp A'C'$, akkor

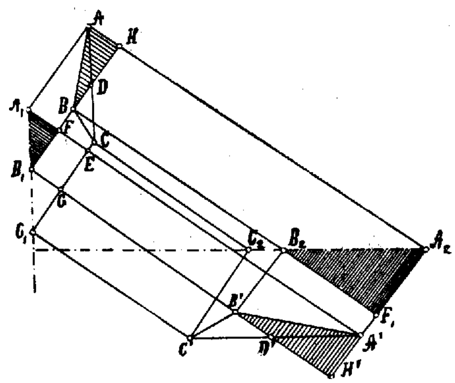
$$ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle,$$

mert szögeik szárai egymásra merőlegesek s így a megfelelő szögek egyenlők.

Mutassuk ki mindenekelőtt azt, hogy ha az $ABC\triangle$ csúcsain át bármily irányban párhuzamosokat húzunk és ezekre az $A'B'C'\triangle$ csúcsaiból merőlegeseket bocsátunk, akkor a megfelelő egyenesek A_1, B_1 és C_1 metszéspontjai egy egyenesen feküsznek.

Legyen $(BB_1,\ AC) \equiv D$[1] és $(B_1B',\ A'C') \equiv D'$.

[1] D pont a BB_1 és AC egyenesek metszéspontja.



2. ábra

Minthogy $ADB\sphericalangle = A'D'B'\sphericalangle$($\perp$ szárú szögek), azért

$$ABD\triangle \sim A'B'D'\triangle$$

s így

(1) $$AD : AC = A'D' : A'C'.$$

Ha továbbá $(A_1A',\ CC_1) \equiv E,\ (A_1A',\ BB_1) \equiv F$ és $(B_1B',\ CC_1) \equiv G$, akkor

(2) $$AD : AC = A_1F : A_1E$$

és

(3) $$A'D' : A'C' = EG : EC_1$$

s minthogy továbbá $EG = FB_1$, azért (2) és (3) tekintetbe vételével (1) így alakul

$$A_1F : A_1E = FB_1 : EC_1,$$

a mi kritériuma annak, hogy az $A_1,\ B_1$ és C_1 pontok egy egyenesben vannak.

Egészen hasonlóan bizonyítjuk, hogy $A_2,\ B_2$ és C_2 pontok is egy egyenesben feküsznek.

Ha $(BB_1,\ AA_2) \equiv H,\ (B_1B',\ A_2A') \equiv H'$ és $(BB_2,\ A'A_2) \equiv F_1$, akkor

$$ABH\triangle \sim A'B'H'\triangle,$$

mert

$$ABH\sphericalangle = A'B'H'\sphericalangle$$

s így

(4) $$AH : A'H' = BH : B'H'.$$

De $AH = A_1F,\ A'H' = B_1F,\ BH = A_2F_1,\ B'H' = B_1F_1$, tehát (4) így alakul:

$$A_1F : B_1F = A_2F_1 : B_2F_1,$$

a miből következik, hogy

$$A_1B_1F\triangle \sim A_2B_2F\triangle$$

Minthogy pedig e két háromszög két pár oldala egymásra merőleges, azért a harmadik oldalpár is merőleges egymásra, vagyis $\overline{A_1B_1C_1} \equiv \overline{A_2B_2C_2}$.

(Krisztián György, Pécs.)

A feladatot még megoldották: Kohn B., Prohászka J., Spitzer Ö., Weisz J. egyetemi hallgatók; továbbá: Filkorn J., Klein A., Krausz B., Lukhaub Gy., Lupsa Gy., Messik G., Sasvári J., Selényi M., Spitzer H.