1°. Minthogy az $A_1C_1CB_1$ és az ACB_1B húrnégyszögek, azért

$$C_1CB_1\sphericalangle = 180° - A_1 = 180° - A$$

és

$$CB_1B\sphericalangle = 180° - A$$

s így

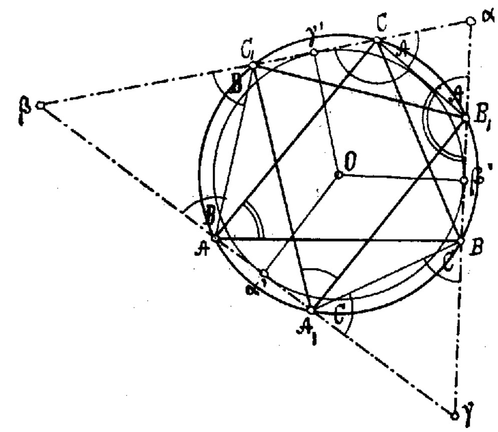
$$\alpha CB_1\sphericalangle = A \quad \text{és} \quad \alpha B_1C\sphericalangle = A$$

tehát

$$C\alpha B_1\sphericalangle = 180° - 2A.$$

Hasonlóképp $C_1\beta A\sphericalangle = 180° - 2B$. és $A_1\gamma B\sphericalangle = 180° - 2C$. De az ABC háromszög talpponti háromszögének szögei is $180° - 2A$, $180° - 2B$, $180° - 2C$. (K.M.L.IV.3–4.sz.) s így az $\alpha\beta\gamma$ háromszög csakugyan hasonló az ABC háromszög talpponti háromszögéhez.

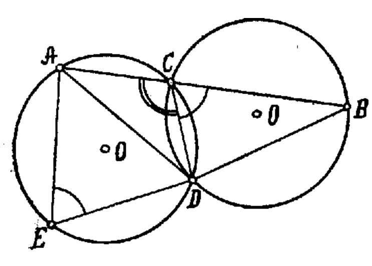
Ha az O pontból az $\alpha\beta\gamma$ háromszög oldalaira merőlegeseket bocsátunk s ezek az oldalakat α', β és γ' pontokban metszik, akkor bebizonyíthatjuk, hogy $O\alpha' = O\beta' = O\gamma'$.



Minthogy a feltétel szerint $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$ és $\overline{CA} = \overline{C_1A_1}$, azért $\overset{\frown}{AA_1} = \overset{\frown}{BB_1} = \overset{\frown}{CC_1}$ és így az $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ és $\overline{CC_1}$ az adott O középpontú körnek egymással egyenlő húrjai. Az egyenlő húrokra a középpontból bocsátott merőlegesek egyenlők, tehát $O\alpha' = O\beta' = O\gamma'$ s így O az $\alpha\beta\gamma$ háromszögbe írt kör középpontja.

Vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz az $\alpha\beta\gamma$ háromszög maximum. Hasonló háromszögek közül ama háromszög nagyobb, melyben a beírt kör nagyobb. Az $\alpha\beta\gamma$ háromszög tehát akkor lesz a legnagyobb, ha a beírt kör eléri maximális értékét. Ez akkor következik be, ha a beírt kör sugara egyenlő az adott O középpontú kör sugarával s ekkor az $\alpha\beta\gamma$ háromszög oldalai érintői lesznek az adott körnek. Ez esetben az A és A_1, B és B_1, C és C_1 pontok, melyek az $\alpha\beta\gamma$ háromszög oldalainak s az adott körnek metszéspontjai, egy-egy pontba esnek össze, vagyis *az $\alpha\beta\gamma$ háromszög akkor éri el maximumát, ha az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek összeesnek.*

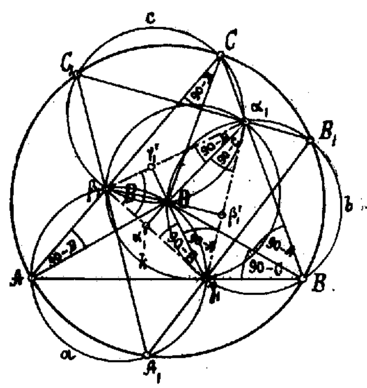
Mielőtt áttérnénk feladatunk többi részeire, a következő segédtételt bizonyítjuk be: ha két egyenlő sugarú kör egymást C és D pontokban metszi és az egyiken, pl. a C ponton keresztül szelőt húzunk, mely a köröket A és B pontokban metszi, akkor $\overline{AD} = \overline{BD}$.



Ugyanis, ha E az O középpontú kör kerületének oly pontja, mely nem fekszik az ACD íven, akkor $AED\sphericalangle + ACD\sphericalangle = 180°$ és $BCD\sphericalangle + ACD\sphericalangle = 180°$ s így $AED\sphericalangle = BCD\sphericalangle$; minthogy pedig egyenlő sugarú körökben egyenlő kerületi szögekhez egyenlő húrok tartoznak, azért $\overline{AD} = \overline{BD}$.

2°. Bizonyítsuk be, hogy az $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ háromszög az ABC háromszöghöz hasonló.

Rajzoljunk az A, A_1, β_1, γ_1, a B, B_1, α_1, γ_1 és C, C_1, α_1, β_1 pontokon keresztül köröket, melyeket rendre a-val, b-vel és c-vel jelölünk. Az a és b körök egymást az O' és γ_1 pontokban metszik.



Minthogy a és b körök sugarai egyenlők ($A\,A_1\,\gamma_1$ és $B\,B_1\,\gamma_1$ húrháromszögek összeillők lévén) és az AB s A_1B_1 egyenesek e két kör γ_1 metszéspontján mennek át, azért a segédtétel értelmében $O'A = O'B = O'A_1 = O'B_1$, a miből következik, hogy O' pont összeesik O-val. Hasonlóképp megmutathatjuk, hogy a b és c körök is az O ponton mennek keresztül, hogy tehát O a három körnek közös metszéspontja. Ennek alapján

$$\beta_1\gamma_1O\sphericalangle = \beta_1AO\sphericalangle = 90^\circ - B$$

és

$$\alpha_1\gamma_1O\sphericalangle = \alpha_1BO\sphericalangle = 90^\circ - A;$$

így tehát

$$\beta_1\gamma_1O\sphericalangle + \alpha_1\gamma_1O\sphericalangle = \beta_1\gamma_1\alpha_1\sphericalangle = 180^\circ - (A + B) = C$$

Épp így mutathatjuk meg, hogy $\gamma_1\alpha_1\beta_1\sphericalangle = A$ és $\alpha_1\beta_1\gamma_1\sphericalangle = B$. Látjuk tehát, hogy $\alpha_1\beta_1\gamma_1\triangle \sim ABC\triangle$. Mutassuk meg, hogy O az $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ háromszög magasságpontja.

Hosszabbítsuk meg az α_1O, β_1O és γ_1O egyeneseket, míg a háromszög oldalait α_1', β_1' és γ_1' pontokban metszik. Ekkor a $\beta_1\gamma_1\gamma_1'$ és $\beta_1\alpha_1\alpha_1'$ háromszögekben

$$\gamma_1\beta_1\gamma_1'\sphericalangle + \beta_1\gamma_1\gamma_1'\sphericalangle = B + (90^\circ - B) = 90^\circ$$

és

$$\alpha_1\beta_1\alpha_1'\sphericalangle + \beta_1\alpha_1\alpha_1'\sphericalangle = B + (90^\circ - B) = 90^\circ;$$

azaz a $\gamma_1\gamma_1'$ és $\alpha_1\alpha_1'$ egyenesek magasságai a háromszögnek, miből következik, hogy a közös metszéspontjukon átmenő $\beta_1\beta_1'$ egyenes is magassága a háromszögnek s így O az $\alpha_1\beta_1\gamma_1'$ háromszög magasságpontja.

Ha az $\alpha_1\beta_1\gamma$ háromszög köré írt kört k-val jelöljük, a k, a, b és c egyenlő sugarú körök, mert pl. a és k köröknek közös húrja van s e húron mindkét körben egyenlő kerületi szögek feküsznek. Minthogy hasonló háromszögek közül ama háromszög kisebb, melynek körülírt köre kisebb, azért az $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ háromszög akkor éri el minimumát az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek kölcsönös fekvésének változásánál, ha a k, a, b, c körök a legkisebbek. Minthogy az a, b, c körök az $AO = BO = CO$ egyeneseket mint húrokat az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek bármily kölcsönös fekvése mellett tartalmazzák, azért e körök akkor lesznek legkisebbek, ha e húrok az a, b, c körök átmérői. Ekkor azonban az a, b, c körök érintik az adott O középpontú kört s minthogy A és A_1, B és B_1, C és C_1 pontok egybe esnek. Tehát az $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ háromszög akkor éri el minimumát, ha az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek egybeesnek. Mint előbb láttuk, ugyanekkor éri el az $\alpha\beta\gamma$ háromszög a maximumát.

(Manheim Emil, műegyetemi hallgató, Budapest.)

A feladatot még megoldották: Prohászka János, műegyetemi h. Prágában; Freibauer E., Kohn B., Krausz B., Krisztián Gy., Lukhaub Gy., Spitzer Ö., Sasvári G., Weisz J.