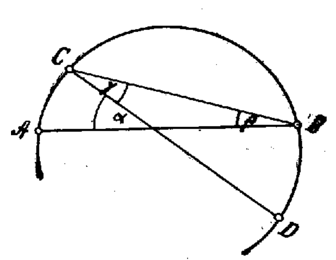
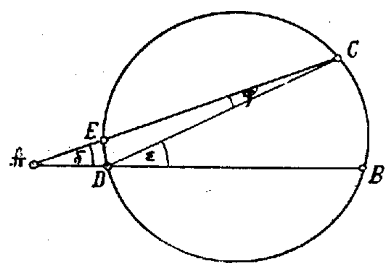
Bizonyításunkban a következő segédtételeket alkalmazzuk:

1. *Az AB és DC húrok által bezárt α szög ama kerületi szögek összegével egyenlő, melyek az AC és BD ívekhez tartoznak:* $\alpha = \beta + \gamma$.



Ennélfogva az α szög mértéke: $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$.

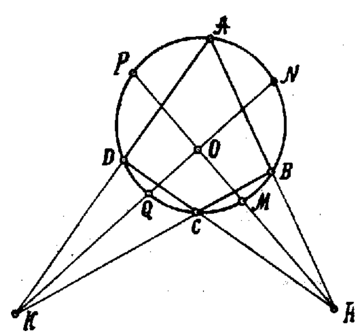
Az AB és AC szelők által bezárt δ szög ama kerületi szögek különbségével egyenlő, melyek a BC és DE ívekhez tartoznak: $\delta = \varepsilon - \varphi$.



Ennélfogva a δ szög mértéke $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DE})$.

2.*Minden húrnégyszögben a szemben fekvő oldalak metszéspontjaiból rajzolt szögfelezők egymásra merőlegesek.*

Bizonyítás. Az $ABCD$ húrnégyszög szemközt fekvő oldalainak H és K metszéspontjaiban rajzolt KN és HP szögfelezők egymást O-ban metszik.



Minthogy HP felezi az AHD szöget, azért

$$\overset{\frown}{AP} - \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{DP} - \overset{\frown}{CM} \tag{1}$$

hasonlóképpen

$$\overset{\frown}{AN} - \overset{\frown}{DQ} = \overset{\frown}{BN} - \overset{\frown}{CQ} \tag{2}$$

E két egyenletet összeadva:

$$\overset{\frown}{PN} - \overset{\frown}{DQ} - \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{BN} + \overset{\frown}{DP} - \overset{\frown}{MQ}$$

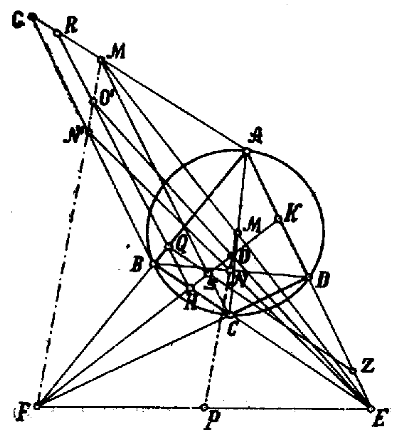
vagy

$$\overset{\frown}{PN} + \overset{\frown}{MQ} = \overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{MN}$$

A PON és MON szögek tehát egyenlők, mert mindekettőnek mértéke ugyanaz s így $\overline{HO}$ merőleges $\overline{KO}$-ra.

3.*Minden teljes négyszögben az átlók felező pontjai egy egyenesen feküsznek.*

Bizonyítás. Legyenek az átlók felezőpontjai M, N és P; a kérdéses szögfelezők egymást 0-ban metszik. Hosszabbítsuk meg $\overline{EM}$-et $\overline{EO}$-t és $\overline{EN}$-et saját hosszúságaikkal M', O' és N' pontokig.



$\overline{AM'}$ és $\overline{BN'}$ egymást G-ben metszik. $\overline{FO}$ $\overline{BC}$-t H-ban, AD-t K-ban metszi. $\overline{O'H}$ $\overline{AB}$-t Q-ban, $\overline{AG}$-t pedig R-ben metszi. Rajzoljunk Q-ból $\overline{BE}$-vel párhzuzamost, mely $\overline{HK}$-t S-ben $\overline{AE}$-t pedig Z-ben metszi.

Az $\overline{FD}$ által metszett ABE háromszögre a *Menelaos*-féle tételt (K.M.L.IV.148.l.) alkalmazva:

(1)
$$\frac{CB \cdot DE \cdot FA}{CE \cdot DA \cdot FB} = 1.$$

De $BCM'G$, $BEDN'$, $CEAM'$ és $ADN'G$ négyszögek egyenközények s így

$$BC = M'G,\ DE = N'B,$$

$$CE = M'A \quad \text{és} \quad DA = N'G$$

mit (1)-be téve:

(2)
$$\frac{M'G \cdot N'B \cdot FA}{M'A \cdot N'G \cdot FB} = 1.$$

Tehát M', N' és F egy egyenesen feküsznek, következésképpen M, N és P pontok is egy egyenesen feküsznek.

Eme tételekkel feladatunk a következőképpen oldható meg:

Alkalmazzuk a Menelaos-féle tételt az FK egyenes által metszett AZQ háromszögre:

(3)
$$\frac{FA \cdot KZ \cdot SQ}{FQ \cdot KA \cdot SZ} = 1.$$

De $KZQO'$, $SQRM'$, $AKO'R$ és $ZSM'A$ négyszögek egyenközények s így

$$KZ = O'Q, \quad SQ = M'R, \quad KA = O'R \quad \text{és} \quad SZ = M'A$$

Eme egyenlőségeket (3)-ba téve:

(4)
$$\frac{FA \cdot O'Q \cdot M'R}{FQ \cdot O'R \cdot M'A} = 1.$$

Tehát $M'O'$ és F pontok s így egyúttal M, O és P pontok is egy egyenesen feküsznek. Minthogy pedig az MP és OP egyeneseknek két pontja összeesik, azért az M, O, N és P pontok valóban egy egyenesen feküsznek.

(Krisztián György, Pécs.)

A feladatot még megoldották: Kornis Ö., Krausz B., Lukhaub Gy., Sasvári G.